ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2016

ПО НОВОЙ ДЕМОВЕРСИИ 2016

Профильный уровень

40 тренировочных вариантов

ЛЕГИОН ТМ

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2016

Профильный уровень

40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год

Учебно-методическое пособие

™

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2015

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *А. Н. Тернопол* — доцент кафедры естественно-математического образования ФГОУ АПК и ППРО, г. Москва;
О. Б. Кожевников — кандидат физико-математических наук, доцент;
А. П. Уваровский — кандидат педагогическими наук, заслуженный учитель РФ.

Авторский коллектив:
Авилов Н. И., Война Е. А., Дерезин С. В., Иванов С. О., Коннова Е. Г., Корянов А. Г., Кривенко В. М., Кулабухов С. Ю., Ольховая Л. С., Ольховой А. Ф., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год**: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 352 с. — (ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0782-2

Учебно-методическое пособие предназначено для фундаментальной подготовки к профильному уровню ЕГЭ по математике в 2016 году. Книга содержит:

- **40 новых авторских тренировочных тестов**, составленных по проектам демоверсии и спецификации ФИПИ на 2016 год профильного уровня ЕГЭ по математике;
- **решение 10 вариантов** тестов;
- краткий теоретический **справочник**.

Книга позволит выпускникам и абитуриентам получить на ЕГЭ желаемый результат — от минимального количества баллов, необходимого для сдачи экзамена, до максимально возможного, практически до 100 баллов.

Издание адресовано выпускникам общеобразовательных учреждений, учителям, методистам.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0782-2

Оглавление

2. Зак. № 41

От авторов

Начиная с 2015 года ЕГЭ по математике разделён на 2 уровня: базовый и профильный.

Данная книга предназначена для фундаментальной подготовки к ЕГЭ по математике. Она написана в соответствии с проектом КИМ профильного ЕГЭ-2016.

Для подготовки к ЕГЭ по математике книгу могут использовать различные группы учащихся.

► Если сдача ЕГЭ по математике нужна только для получения аттестата и по какой-то причине выбран профильный экзамен, то нужно сосредоточиться на выполнении заданий 1—8, образующих первую часть каждого варианта данной книги.

► Если необходим высокий балл на ЕГЭ для поступления на техническую или социологическую специальность, то нужно добиться уверенного выполнения заданий 1—15, а также обратить внимание на задание 17 этой книги.

► Если предполагается продолжение математического образования в ВУЗе или поступление на престижную экономическую специальность (целью являются 90—100 баллов), то необходимо научиться решать все задания данного пособия.

Книга содержит:

• **40 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по проекту спецификации ЕГЭ-2016;

• **решение 10 вариантов** теста;

• **краткий справочник** по элементарной математике, содержащий теоретический материал, достаточный для выполнения всех заданий данного пособия.

Ко всем вариантам даны **ответы**. Одновременно с данной книгой издательство выпускает **решебник**, в котором представлены подробные решения всех остальных вариантов и даны методические рекомендации.

Отметим, что варианты тестовых заданий носят парный характер, то есть являются попарно подобными (так, например, подобны 5-й и 6-й варианты, 7-й и 8-й и т. д.). Это удобно для учителя, так как оптимизирует процесс подготовки. Прорешав с учащимися в классе один из нечётных вариантов, целесообразно задать на дом следующий (чётный) вариант.

Варианты в книге располагаются по возрастанию уровня сложности заданий. При этом уровень сложности и темы заданий с кратким ответом (ранее составлявшие часть B) соответствуют предлагаемым заданиям открытого банка[1].

Пособие является частью комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемого издательством «Легион».

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»: основные пособия

Пособие	Задания по темам	Варианты ЕГЭ	Теория	Решения	Уровень сложности*
Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10–11 классы	+++		++	+	БПВ
Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год		+++	++	+	БПВ
Математика. Подготовка ЕГЭ-2016. Базовый уровень		+++	++		БПВ
Математика. Решебник с методическими рекомендациями. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов				+++	БПВ
Математика. 10-11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия	+++				Б
Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по тригонометрии (задание с развёрнутым ответом)	+++				П
Математика. ЕГЭ-2016. Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. 10–11 классы. Неравенства. Тренажёр.	+++				П
Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы	+++			+	П
Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Учимся выполнять задания с развёрнутым ответом	++		++	++	ПВ
Математика. 7-11 классы. Карманный справочник			++		
Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ	+		++	++	БПВ

*Б — базовый, П — повышенный, В — высокий уровень сложности

[1] Доступен на сайте http://mathege.ru

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10–11 классы.
Сборник тренировочных заданий, сгруппированных по темам и предназначенный для подготовки к базовому и профильному ЕГЭ.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год.
Настоящая книга.
- Математика. Решебник с методическими рекомендациями. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов.
Пособие содержит решения всех вариантов тестовых заданий книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год».
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Базовый уровень.
Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ЕГЭ по математике на базовом уровне, дополненный теоретическим справочником.
- Математика. 10–11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия. *Тренажёр для подготовки к решению заданий ЕГЭ с кратким ответом.*
- Математика. 7–11 классы. Карманный справочник.
Пособие содержит необходимый справочный материал для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике, а также к различным формам промежуточного контроля по алгебре и геометрии в 7–11 классах.
- Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ.
Пособие содержит теоретический материал, подкреплённый примерами его использования при решении заданий ЕГЭ.
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы.
Пособие содержит задания по уравнениям и неравенствам, традиционно включаемым в число заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом.
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по тригонометрии (задание с развёрнутым ответом).

Пособие содержит около 300 задач по тригонометрии, предназначенных для подготовки к выполнению первого из заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом.

- Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. 10–11 классы. Неравенства. Тренажёр.
  Пособие содержит большое количество заданий по решению неравенств, предназначенных для подготовки к выполнению соответствующего задания ЕГЭ с развёрнутым ответом.
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Учимся выполнять задания с развёрнутым ответом.
  Самоучитель и задачник для подготовки к решению неравенств, экономически ориентированных задач, заданий с параметром, исследовательских задач, предлагаемых на ЕГЭ.

Дополнением к комплексу послужат следующие пособия:

- ► Математика. 11-й класс. Повторение материала средней школы и подготовка к итоговой аттестации. Интенсивный курс для учителей и обучающихся.
- ► Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей.
- ► Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат.
- ► Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий повышенного и высокого уровней сложности. Решения и комментарии.
- ► Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней.
- ► Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 16. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- ► Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 17. Решение неравенств с одной переменной.
- ► Математика. Подготовка к ЕГЭ: решение планиметрических задач.

Методика работы с основными пособиями комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Подготовку к ЕГЭ следует начинать с пособий «Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10—11 классы» и «Математика. 10—11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия». Оба этих пособия могут использоваться в течение двух учебных лет (10 и 11 классы), а способ организации процесса обучения зависит от преподавателя. Например, используя тренажёр, учащиеся могут выполнить на уроке большое число заданий базового уровня сложности по определённой теме или по различным темам. Книгу «Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10—11 классы» можно использовать для ознакомления с методами решения задач базового, повышенного и высокого уровня сложности, для организации диагностики и контроля (самоконтроля). Её использование целесообразно не только на уроках, но и при самоподготовке.

Сборник тестов «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» следует использовать после освоения большей части материала из рассмотренных выше пособий. Предлагаемые в нём тренировочные варианты в формате профильного уровня ЕГЭ могут использоваться по принципу разбора варианта в классе и оставления парного варианта школьникам в качестве домашней работы, а могут — и для проведения репетиции экзамена или для организации диагностики и контроля.

К указанному сборнику тестов отдельно предлагается решебник с подробными пояснениями, который может использоваться как преподавателем — для разбора решений заданий повышенного и высокого уровней сложности, так и учащимся при самостоятельной подготовке.

Для подготовки к сдаче базового уровня ЕГЭ следует использовать книгу «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Базовый уровень». Методика работы с этим сборником тестов та же, что и с рассмотренным ранее сборником тестов для профильного уровня ЕГЭ.

Пособия «Математика. 7—11 классы. Карманный справочник» и «Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ» удобно использовать для получения необходимого теоретического материала в период подготовки к ЕГЭ. Большой справочник, кроме того, будет полезен для организации повторения теории: по прилагаемым там примерам заданий можно определить важность запоминания тех или иных формул и теорем для успешной сдачи экзамена.

Следующие пособия предназначены для подготовки к заданиям с развёрнутым ответом. Начинать здесь следует с двух тренажёров: «Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по тригонометрии (задание с развёрнутым ответом)» и «Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. 10–11 классы. Неравенства. Тренажёр». Оба этих тренажёра построены по принципу от простого — к сложному, и их следует использовать не только для тренировки и контроля, но и при изучении соответствующих тем. Например, тренажёр по тригонометрии можно использовать в качестве тренировочной тетради на уроках алгебры (математики), посвящённых изучению тригонометрии.

Книгу «Математика. Профильный уровень ЕГЭ-2016. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы» рекомендуется использовать совместно с тренажёрами для диагностических и контрольных работ либо при выдаче учащимся заданий на дом.

К пособию «Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Учимся выполнять задания с развёрнутым ответом» следует переходить при работе с наиболее подготовленными учащимися, претендующими на высокий балл ЕГЭ. Рассмотренные в нём темы можно как отдавать на самостоятельное изучение отдельным школьникам, так и применять в классах/школах с углублённым изучением математики.

Обсудить пособия, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальных форумах издательства
http://f.legionr.ru,
http://legion-posobiya.livejournal.com.

Следите за бесплатными дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства **http://legionr.ru** в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ.

Замечания и пожелания можно направлять по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550 или на e-mail: legionrus@legionrus.com.

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом, 5 заданий повышенного уровня сложности с развёрнутым ответом и 2 задания высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1—12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Глава I. Учебно-тренировочные тесты

Вариант № 1

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В школе немецкий язык изучают 94 учащихся, что составляет 25 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

2. На рисунке 1 точками показана среднесуточная влажность воздуха с 10 по 18 февраля 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — влажность воздуха в процентах. Для наглядности точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку наименьшую среднесуточную влажность воздуха (в процентах) за указанный период.

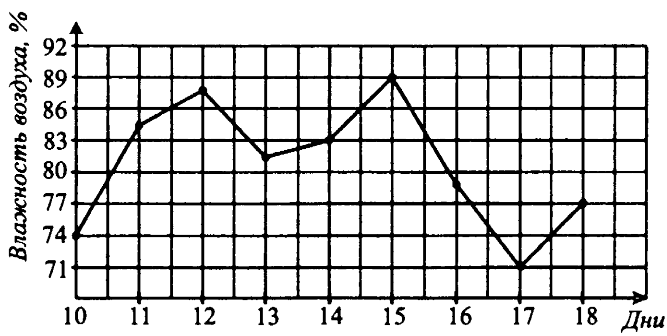


Рис. 1

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 2). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

4. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 28 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

5. Найдите корень уравнения $2x^2 - 17x - 9 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

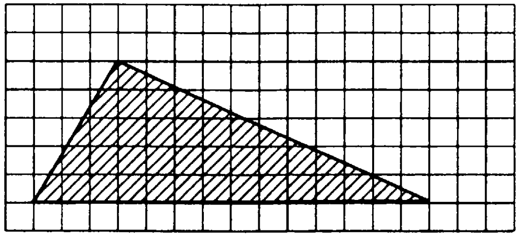


Рис. 2

6. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 15$, высота AH равна 12. Найдите $\sin \angle ACB$.

7. На рисунке 3 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

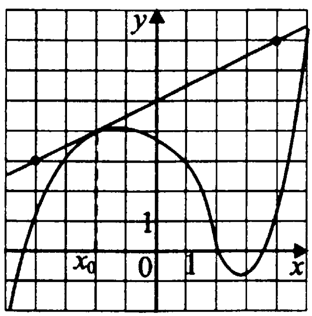


Рис. 3

8. Во сколько раз увеличится объём куба (см. рис. 4), если все его рёбра увеличить в семь раз?

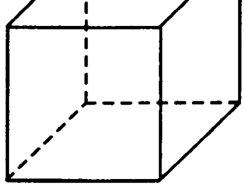


Рис. 4

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{146^2 - 110^2}$.

10. Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h (в м) от поверхности Земли, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле: $l = \sqrt{\dfrac{R \cdot h}{500}}$, где $R = 6\,400$ км — радиус Земли. На какой высоте (в м) находится наблюдатель, если $l = 8$ км?

11. Из городов A и B, расстояние между которыми 270 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились на расстоянии 140 км от A. Найдите скорость автобуса (в км/час), выехавшего из пункта B, если автобусы встретились через 2,5 часа.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 10x + 106}$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) - 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ со стороной основания $BC = 12$ и боковым ребром $SB = 8$ на рёбрах SB и SC взяты точки E и F соответственно, являющиеся серединами рёбер. Плоскость α, содержащая прямую EF, перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит биссектрису AA_1 основания пирамиды в отношении $5 : 1$, считая от точки A.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15. Решите неравенство $\dfrac{4^x + 2}{4^x - 8} + \dfrac{4^x}{4^x - 4} + \dfrac{8}{16^x - 12 \cdot 4^x + 32} \leqslant 0$.

16. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, при этом меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке R. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что DE параллельно BC.

б) L — точка пересечения RA и DE. Найдите AL, если радиус большей окружности 17, а $BC = 30$.

17. 10 июня в банке взяли кредит на 15 месяцев. При этом 3-го числа каждого месяца долг возрастает на a % по сравнению с концом предыдущего месяца, с 4 по 9-е число каждого месяца нужно выплатить часть долга, при этом 10-го числа долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 10-е число предыдущего месяца.

Найдите a, если общая сумма выплат после полного погашения кредита на 16 % больше суммы, взятой в кредит.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 8x - 8y - 40 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ y = ax - 5 \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19. Ученики некоторой школы написали тест. Ученик за этот тест мог получить целое неотрицательное число баллов. Считается, что ученик сдал тест, если набрал не менее 50 баллов. Чтобы результаты улучшились, каждому участнику тестирования добавили по 5 баллов, поэтому количество сдавших тест увеличилось.

а) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест?

б) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест, и при этом средний балл участников, сдавших тест, тоже понизиться?

в) Пусть первоначально средний балл участников, сдавших тест, составил 60 баллов, не сдавших тест — 40 баллов, а средний балл всех участников составил 50 баллов. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 63 баллам, а не сдавших тест — 43. При каком наименьшем числе участников возможна такая ситуация?

Вариант № 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. 63 выпускника школы собираются учиться в технических вузах. Они составляют 70 % от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

2. На рисунке 5 точками показана среднесуточная скорость ветра с 20 января по 7 февраля 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — скорость ветра в м/с. Для наглядности точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку наибольшую среднесуточную скорость ветра (в м/с) за указанный период.

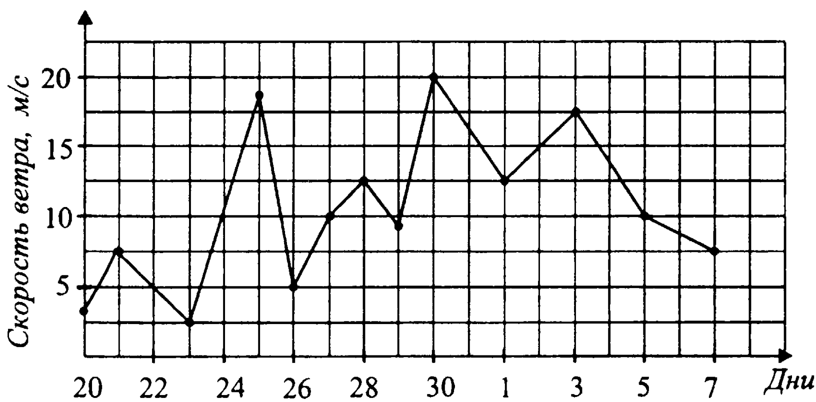


Рис. 5

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 6). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

4. Фабрика выпускает кожаные портфели. В среднем 6 портфелей из 150 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленный портфель окажется без дефектов.

5. Найдите корень уравнения $4x^2 + 23x - 6 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

6. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 10$, высота AH равна 8. Найдите $\cos \angle ACB$.

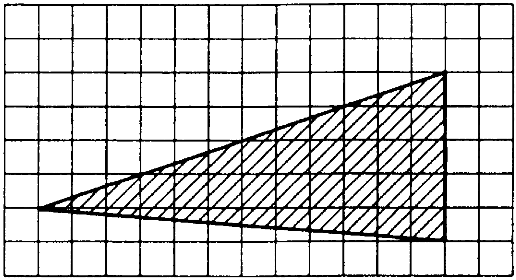


Рис. 6

7. На рисунке 7 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

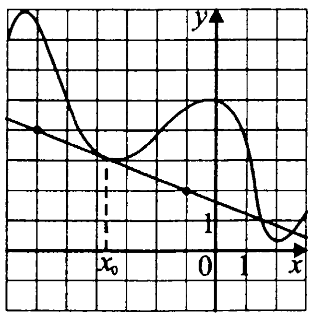


Рис. 7

8. Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра (см. рис. 8), если все его рёбра увеличить в двенадцать раз?

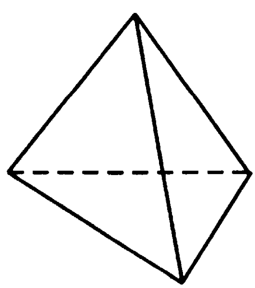


Рис. 8

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(\sqrt{29}-\sqrt{9})(\sqrt{29}+\sqrt{9})$.

10. Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h (в м) от поверхности Земли, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле: $l=\sqrt{\frac{R\cdot h}{500}}$, где $R=6\,400$ км — радиус Земли. Наблюдатель, находящийся на небольшой высоте, видит горизонт на расстоянии 13,6 км. На сколько метров ещё надо подняться, чтобы горизонт был виден на расстоянии 16 км?

11. Из городов A и B, расстояние между которыми 280 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста и встретились через 4 часа на расстоянии 80 км от города B. Найдите скорость мотоциклиста, выехавшего из города A. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{40+6x-x^2}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ со стороной основания AB, равной 30, боковое ребро равно 20. Точки N и M делят рёбра DA и DB в отношении $2:1$, считая от вершины D. Плоскость α, содержащая прямую MN, перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту CE основания в отношении $8:1$, считая от точки C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $DABC$ плоскостью α.

15. Решите неравенство $\frac{11^x}{11^x-11}+\frac{11^x+11}{11^x-3}+\frac{11^x+121}{121^x-14\cdot 11^x+33}\leqslant 0$.

16. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, при этом меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке T. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках M и K соответственно.

а) Докажите, что MK параллельно BC.

б) TA пересекает MK в точке N. Найдите AN, если радиус большей окружности 41, а $BC = 80$.

17. 15 января в банке взяли кредит на 25 лет. При этом 30 января каждого года банк начисляет a % годовых (долг увеличивается на a % по сравнению с долгом на 15 января). С февраля по декабрь каждого года клиент должен выплатить такую часть долга, чтобы 15 января долг стал на одну и ту же сумму меньше долга на 15 января предыдущего года.

Найдите a, если общая сумма выплат после полного погашения кредита на 65 % больше суммы, взятой в кредит.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 8y + y^2 - 8|y + x + 2| = 4, \\ y + 6 = a(x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

19. Ученики некоторой школы написали тест. Ученик за этот тест мог получить целое неотрицательное число баллов. Считается, что ученик сдал тест, если набрал не менее 45 баллов. Чтобы результаты улучшились, каждому участнику тестирования добавили по 7 баллов, поэтому количество сдавших тест увеличилось.

а) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест?

б) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест, и при этом средний балл участников, сдавших тест, тоже понизился?

в) Пусть первоначально средний балл участников, сдавших тест, составил 55 баллов, не сдавших тест — 30 баллов, а средний балл всех участников составил 45 баллов. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 60 баллам, а не сдавших тест — 32. При каком наименьшем числе участников возможна такая ситуация?

Вариант № 3

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1700 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 9 недель?

2. На рисунке 9 точками показана цена акций компании «Газпром» на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни января 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена акции в рублях. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа рассматриваемого периода цена акций «Газпрома» на момент закрытия торгов была наименьшей.

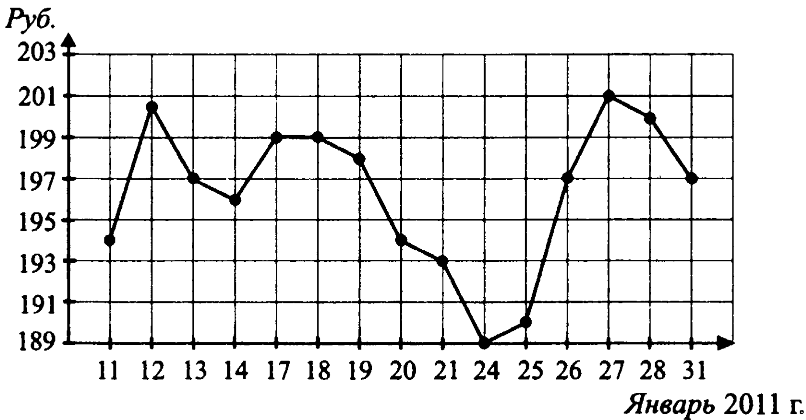


Рис. 9

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 10). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

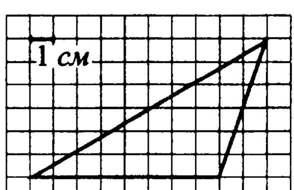


Рис. 10

4. В большой партии насосов в среднем на каждые 2 472 исправных приходится 28 неисправных насосов. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-23}=\frac{1}{33}$.

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH — высота, $AB = 12$, $\operatorname{tg} A = 3$ (см. рис. 11). Найдите AH.

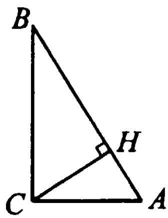


Рис. 11

7. На рисунке 12 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

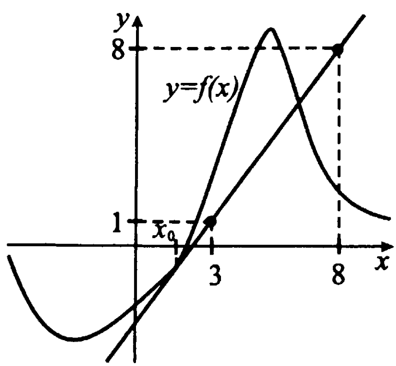


Рис. 12

8. Во сколько раз уменьшится объём конуса (см. рис. 13), если его высота уменьшится в 17,1 раза, а радиус основания останется прежним?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4^{7,8}\cdot 9^{9,8}}{36^{8,8}}$.

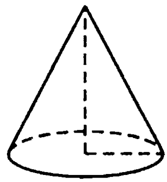


Рис. 13

10. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле
$R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+3)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}04K}{r_{\text{пок}} + 0{,}2}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 13, их средняя оценка равна 0,84, а оценка экспертов равна 0,24.

11. Смешали 3 литра 12%-го водного раствора и 5 литров 20%-го водного раствора. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+100x+2503}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{121}\right)^{\cos x} = 11^{2\sin 2x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна 12, а апофема равна 20. Точки P и T — середины рёбер SB и SC соответственно. Плоскость α содержит прямую PT и параллельна высоте пирамиды SH.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту основания BB_1 в отношении 1 : 2, считая от точки B.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{4^{x-1} + 60}{4 \cdot 4^{2x} - 65 \cdot 4^x + 16} + 0{,}25 \geqslant 0$.

16. Точка P лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, точки B и C являются вершинами равнобедренных треугольников с основаниями AP и DP соответственно, а угол APD прямой.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть эти биссектрисы пересекаются в точке E и $BP : PC = 2 : 5$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AP, DP, BE и CE, равна 20.

17. Стоимость разработки электронной версии учебника некоторого издательства равна 800 тысяч рублей. Затраты на производство x тысяч таких электронных учебников в этом издательстве равна $x^2 + 6x + 22100$ тысяч рублей в год. Если электронный учебник продавать по цене a рублей за единицу, то прибыль издательства (в тысячах рублей) за один год составит $ax - (x^2 + 6x + 22\,100)$. Издательство будет выпускать электронные учебники в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении a разработка учебника окупится не более, чем за два года?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ y^2 - 2x - 8 = |x^2 - 2x - 8| \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19. В детском лагере вожатому требуется выдать денежные призы участникам некоторой игры на общую сумму 600 рублей (размер приза каждого ребёнка — целое число рублей, может быть и 0). Вожатый должен выдать призы без сдачи и размена, имея 100 монет по 1 рублю и 100 монет по 5 рублей.

а) Можно ли выдать призы, если в игре участвуют 30 детей и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выдать премии, если 4 членам жюри надо выдать по 10 рублей, а остальное поделить поровну на 80 участников?

в) При каком наибольшем количестве участников игры призы удастся выдать при любом распределении размеров призов?

Вариант № 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,4 г 4 раза в день в течение 28 дней. В одной упаковке 12 таблеток лекарства по 0,4 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

2. На рисунке 14 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 16 по 28 марта. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавшее в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в указанный период выпало наибольшее количество осадков.

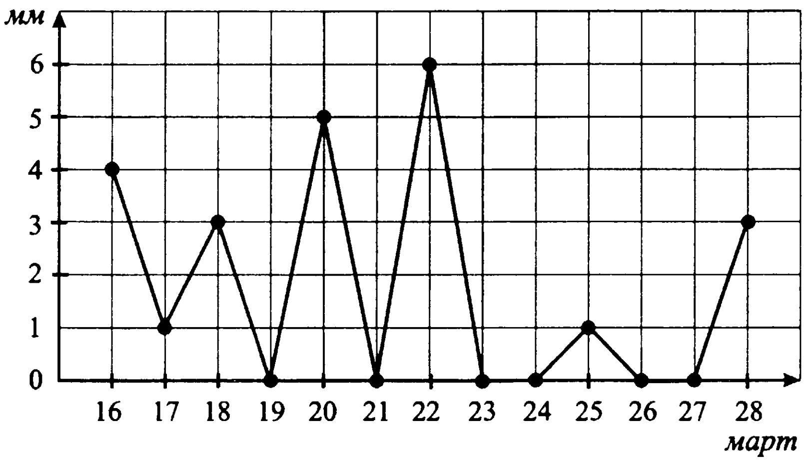


Рис. 14

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 15). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

4. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 981 качественную сумку приходится 19 сумок, имеющих скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектами.

5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{8x-2} = 5$.

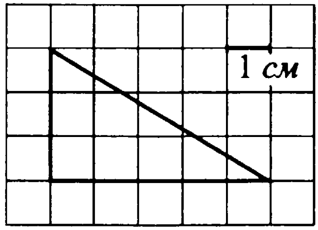


Рис. 15

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH — высота, $AB = 24$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{7}$. Найдите BH.

7. На рисунке 16 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

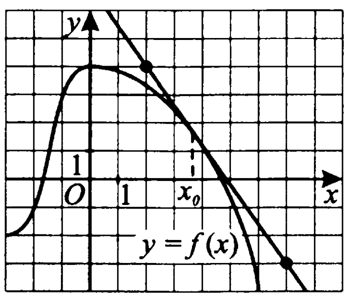


Рис. 16

8. Во сколько раз увеличится объём конуса (см. рис. 17), если радиус его основания увеличится в 1,6 раза, а высота останется прежней?

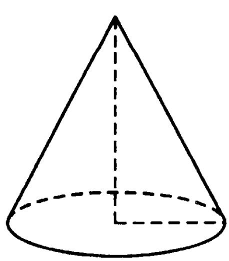


Рис. 17

Часть 2

9. Найдите значение выражения $48^{-8,3} \cdot 6^{9,3} : 8^{-7,3}$.

10. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле
$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+2)^m}$, где $m = \frac{0{,}03K}{r_{\text{пок}} + 0{,}5}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 23, их средняя оценка равна 0,88, а оценка экспертов равна 0,18.

11. Смешали некоторое количество 31 %-го раствора с таким же количеством 23 %-го раствора. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-60-16x-x^2}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение
$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\cos 2x} = 7^{2-2\cos x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ высота равна 15, а апофема равна 17. Точки P и V делят боковые рёбра DB и DC соответственно в отношении 1 : 2, считая от вершины D. Плоскость β содержит прямую PV и параллельна высоте пирамиды DH.

а) Докажите, что плоскость β делит высоту основания BB_1 в отношении 4 : 5, считая от точки B.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

15. Решите неравенство $\frac{22 \cdot 3^x - 6}{9 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x + 27} + \frac{1}{3} \geqslant 0$.

16. Точка R лежит на стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, точки A и D являются вершинами равнобедренных треугольников с основаниями BR и CR соответственно, а угол BRC прямой.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах A и D четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне BC.

б) Пусть эти биссектрисы пересекаются в точке Q и $DR : RA = 7 : 3$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых BR, CR, AQ и DQ, равна 63.

17. Строительство нового цеха стоит 39 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции в этом цехе равны $0,5x^2 + 4x + 19$ млн рублей в год. Если продукцию цеха продать по цене a тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $ax - (0,5x^2 + 4x + 19)$. Когда цех будет построен, фирма станет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении a строительство цеха окупится не более, чем за 3 года?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - x = a, \\ y^2 - 3x - 4 = |x^2 - 3x - 4| \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19. В одной из фирм бухгалтеру требуется выдать премии сотрудникам на общую сумму 60 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 100). Бухгалтер должен выдать премии без сдачи и размена, имея 100 купюр по 100 рублей и 100 купюр по 500 рублей.

а) Можно ли выдать премии, если в фирме 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли премировать сотрудников, если ведущему специалисту надо выдать 4 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 человек?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в фирме премии удастся выдать при любом распределении размеров премий?

Вариант № 5

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Футболка стоила 600 рублей. После снижения цены она стала стоить 480 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

2. На диаграмме (см. рис. 18) показана среднемесячная температура воздуха в Ростове-на-Дону за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме номер месяца, в котором среднемесячная температура была самой высокой.

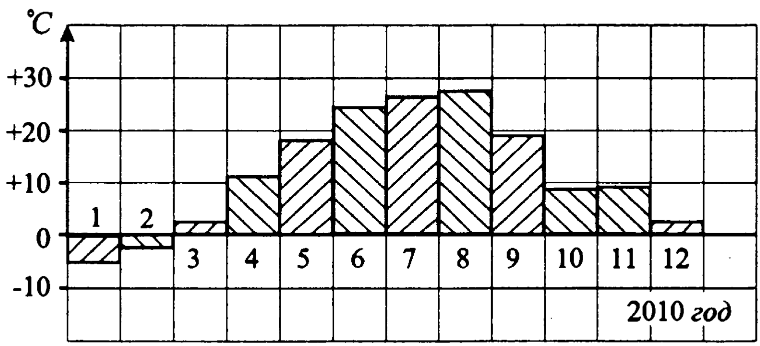


Рис. 18

3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 4), (4; 10), (6; 4) (см. рис. 19).

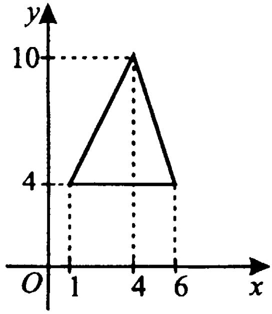


Рис. 19

4. Миша, Боря, Вова и Дима бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру будет Миша.

5. Найдите корень уравнения $\frac{3}{11}x = 27\frac{9}{11}$.

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH — высота, $BC = 14$, $\sin A = 0{,}7$. Найдите BH.

7. На рисунке 20 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

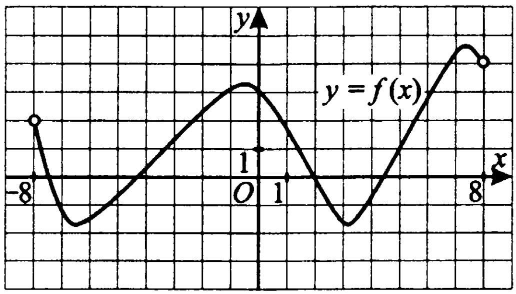


Рис. 20

8. Через среднюю линию основания треугольной призмы (см. рис. 21), объём которой равен 36, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

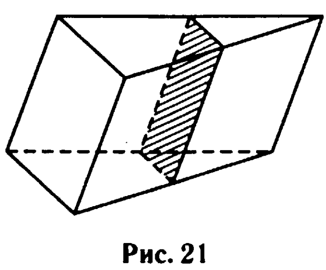


Рис. 21

Часть 2

9. Найдите значение выражения $0{,}6^{\frac{3}{11}} \cdot 5^{\frac{10}{11}} \cdot 45^{\frac{4}{11}}$.

10. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p задаётся формулой $q = 300 - 60p$. Месячная выручка r

определяется как $r(p) = q \cdot p$ (тыс. руб.). Определите максимальный уровень цены p (тыс. руб.), при котором величина месячной выручки предприятия составит не менее 315 тыс. руб.

11. В результате смешивания 25 %-го и 15 %-го растворов серной кислоты получили 750 г 20 %-го раствора. Сколько граммов 15 %-го раствора было взято?

12. Найдите точку минимума функции $y = (x+24)e^{x-70}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB = 12$, $BC = 5$. Боковые рёбра $SA = 3\sqrt{3}$, $SB = \sqrt{171}$, $SD = 2\sqrt{13}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между SC и BD.

15. Решите неравенство $\frac{7}{\left(2^{3-x^2}-1\right)^2} - \frac{8}{2^{3-x^2}-1} + 1 \geqslant 0$.

16. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{5}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 16x + y^2 + 16y + 48 = |x^2 + y^2 - 16|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

19. На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше 14, но не превосходит 54. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 18. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 8, с доски стёрли.
а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 16?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 14, но меньше 15?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Вариант № 6

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Мобильный телефон стоил 4600 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 3 910 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

2. На диаграмме (см. рис. 22) показано число посетителей сайта «Инфоновости» за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число посетителей. Определите по диаграмме номер месяца, когда сайт посетило больше всего людей.

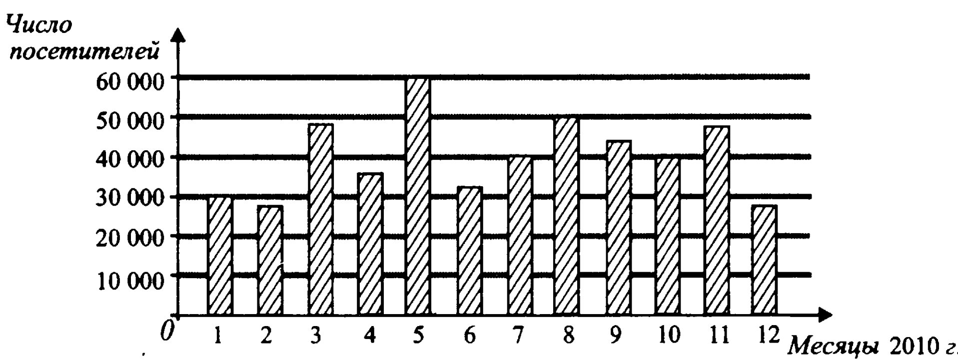


Рис. 22

3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 2), (10; 6), (10; 2) (см. рис. 23).

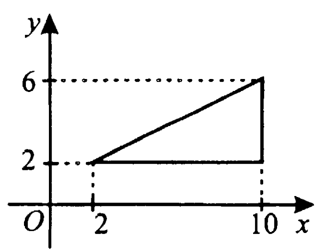


Рис. 23

4. В чемпионате мира участвуют 20 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

5. Найдите корень уравнения $-\frac{4}{7}x = 13\frac{5}{7}$.

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH — высота, $BC = 10$, $\cos A = \frac{\sqrt{24}}{5}$. Найдите AH.

7. На рисунке 24 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

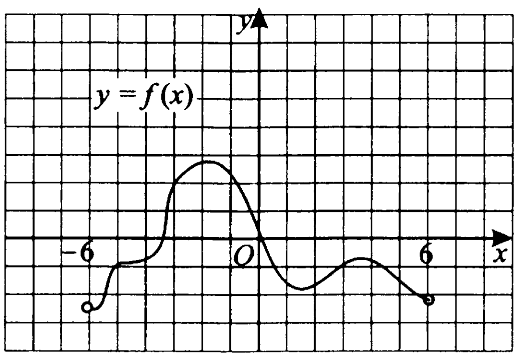


Рис. 24

8. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость (см. рис. 25), параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы 9,5.

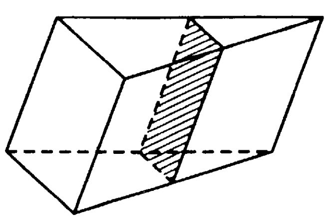


Рис. 25

Часть 2

9. Найдите значение выражения $3{,}5^{\frac{7}{9}} \cdot 7^{\frac{4}{9}} \cdot 14^{\frac{7}{9}}$.

10. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 750$ руб. за единицу. Переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 250$ руб., постоянные расходы предприятия — $f = 800\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в руб.) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 400 000 руб.

11. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 24 кг, содержащий 45 % меди. Сколько килограммов чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 40 % меди?

12. Найдите точку максимума функции $y = (20 - x)e^{x+10}$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\cos 2x + 8\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB = 12$, $BC = 9$. Боковые рёбра $SA = \sqrt{31}$, $SB = 5\sqrt{7}$, $SD = 4\sqrt{7}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между SC и BD.

15. Решите неравенство $\dfrac{45}{\left(4^{2-x^2} - 1\right)^2} - \dfrac{18}{4^{2-x^2} - 1} + 1 \geqslant 0$.

16. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание BC в точке P. Докажите, что $\frac{BP}{PC} = \sin C$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{8}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 21 млн рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{2}x + y^2 + 4\sqrt{2}y + 6 = |x^2 + y^2 - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

19. На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше 2, но не превосходит 42. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 6. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 2, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 10?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 8, но меньше 9?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Вариант № 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Клиент взял в банке кредит 18 000 рублей на год под 14 %. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

2. На рисунке 26 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 8 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.

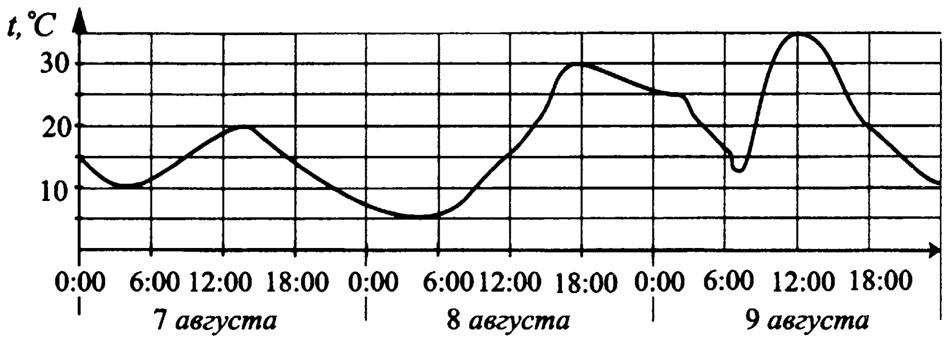


Рис. 26

3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (1; 4), (10; 0), (10; 7) (см. рис. 27).

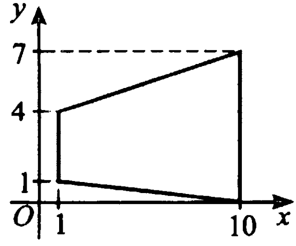


Рис. 27

4. Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся С. верно решит больше 12 задач, равна 0,68. Вероятность того, что С. верно решит больше 11 задач, равна 0,72. Найдите вероятность того, что С. верно решит ровно 12 задач.

5. Найдите корень уравнения $\frac{5x}{4x^2-6} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

6. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 12$, $\sin BAC = 0{,}8$. Найдите высоту AH.

7. На рисунке 28 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

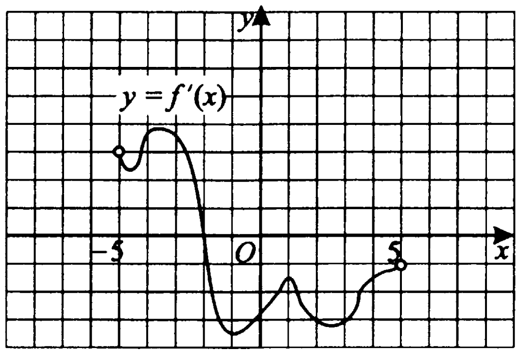


Рис. 28

8. Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 18. Точка E — середина ребра SB (см. рис. 29). Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{48 \sin 29^\circ \cdot \cos 29^\circ}{\sin 58^\circ}$.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -3 до 3. Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность —

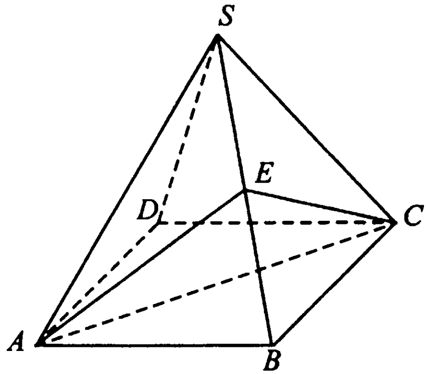


Рис. 29

вчетверо дороже, чем оперативность. В результате формула примет вид $R = \dfrac{4In + Op + 2Tr}{A}$. Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 105?

11. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 25 000 рублей, через два года он был продан за 21 622,5 рублей.

12. Найдите точку минимума функции $y = (x-9)^2 e^{2x-1}$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\cos 2x + 0{,}5 = \cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 15$. Боковые рёбра $SB = 6\sqrt{2}$, $SC = 3\sqrt{33}$, $SA = 2\sqrt{34}$.

а) Докажите, что SB — высота пирамиды.

б) Найдите угол между SD и AC.

15. Решите неравенство $\dfrac{16}{\left(3^{1-x^2}+1\right)^2}-\dfrac{16}{3^{1-x^2}+1}+3\geqslant 0.$

16. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{PD}=\sin D$.

б) Найдите периметр трапеции, если радиусы окружностей равны 4 и 1.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,4 млн рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+12x+36=|x^2+y^2-9|-y^2+12y+9,\\ y=x-a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

19. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 30. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 8. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 10?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 11, но меньше 12?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Вариант № 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Клиент взял в банке кредит 24 000 рублей на год под 18 %. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

2. На рисунке 30 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 13 мая. Ответ дайте вградусах Цельсия.

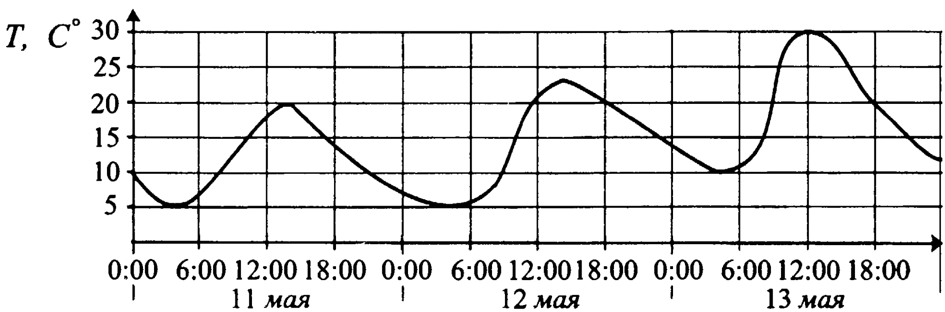


Рис. 30

3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (2; 6), (2; 9), (8; 5), (8; 2) (см. рис. 31).

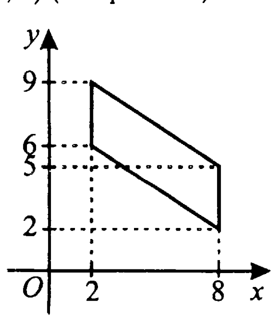


Рис. 31

4. Вероятность того, что новый фонарик прослужит больше года, равна 0,92. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,86. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

5. Найдите корень уравнения $x = \dfrac{7(x+3)}{3x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

6. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 15$, $\sin BAC = \dfrac{3}{5}$. Найдите высоту BH.

7. На рисунке 32 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. В какой точке отрезка $[-2; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

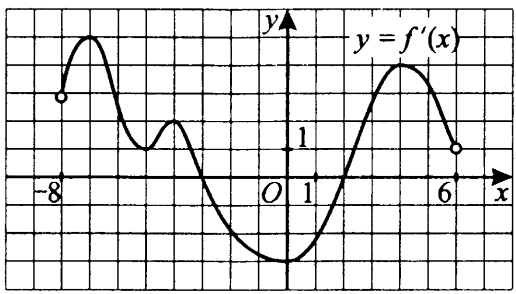


Рис. 32

8. Точка E — середина ребра SB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (см. рис. 33). Объём треугольной пирамиды $EABC$ равен 2,7.

Найдите объём $SABCD$.

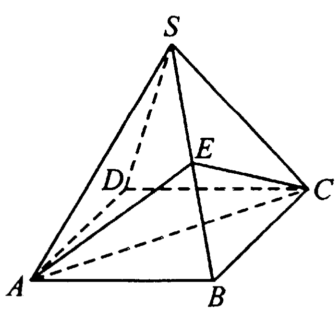


Рис. 33

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{28(\sin^2 23^\circ - \cos^2 23^\circ)}{\cos 46^\circ}$.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 1 до 5. Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вчетверо, а оперативность публикаций — вдвое дороже, чем информативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{In + 2Op + 4Tr + Q}{A}$. Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все оценки наибольшие, получило рейтинг 100?

11. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 22 000 рублей, через два года он был продан за 19 027,8 рублей.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x+8)^2 e^{17-x}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\cos 2x + 0{,}5 = \sin^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB = 21$, $BC = 20$. Боковые рёбра $SB = 2\sqrt{30}$, $SC = 2\sqrt{130}$, $SA = \sqrt{561}$.

а) Докажите, что SB — высота пирамиды.

б) Найдите угол между SD и AC.

15. Решите неравенство $\dfrac{156}{\left(5^{2-x^2}+1\right)^2} - \dfrac{136}{5^{2-x^2}+1} + 5 \geqslant 0$.

16. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание BC в точке P. Докажите, что $\dfrac{BP}{PC} = \sin C$.

б) Найдите периметр трапеции, если радиусы окружностей равны $\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{1}{4}$.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,25 млн рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 9 = |x^2 + y^2 - 3| + 4\sqrt{3}(x + y), \\ y = a - x \end{cases}$$

имеет более одного решения.

19. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше 24, но не превосходит 54. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 32. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 13, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 22?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 23, но меньше 24?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Вариант № 9

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В летнем лагере 258 детей и 56 воспитателей. Автобус рассчитан не более чем на 55 пассажиров. Какое наименьшее количество автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

2. На графике (см. рис. 34) показано изменение удельной теплоёмкости водного раствора некоторого вещества в зависимости от температуры. По горизонтали указывается температура в градусах Цельсия, по вертикали — удельная теплоёмкость в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$. Определите по рисунку наименьшую возможную удельную теплоёмкость раствора на исследуемом диапазоне температур. Ответ дайте в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$.

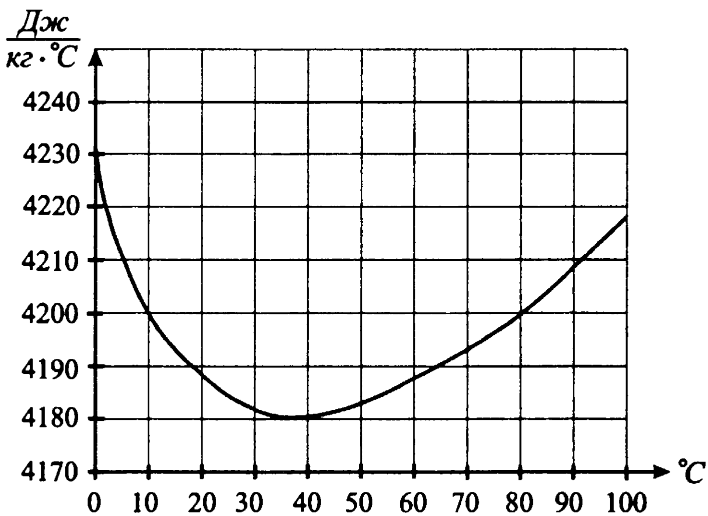


Рис. 34

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён $\triangle ABC$ (см. рис. 35). Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.

4. В группе туристов 50 человек. Их вертолётом в несколько приёмов доставляют в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в кото-

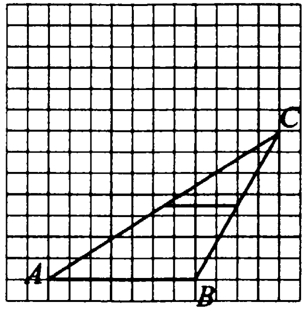


Рис. 35

ром вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.

5. Найдите корень уравнения $5^{22-3x} = 625$.

6. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиусом 4, равен 30° (см. рис. 36). Найдите сторону AB этого треугольника.

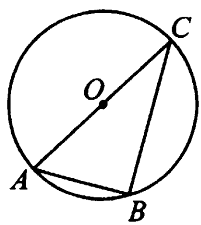


Рис. 36

7. На рисунке 37 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-7; 10]$.

8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 8$, $AD = 9$, $AA_1 = 7$.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $-22\sqrt{3}\cos(-930°)$.

10. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя

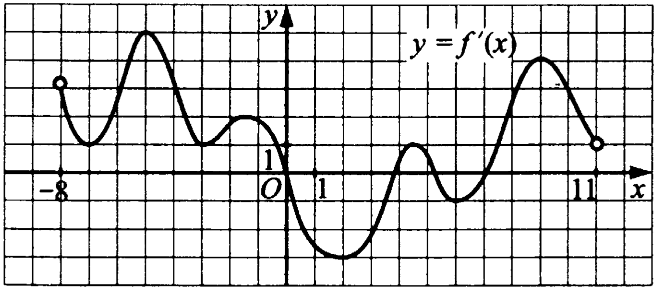


Рис. 37

(в кельвинах), T_2 — температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет 36 %, если температура холодильника $T_2 = 352$ К? Ответ дайте в кельвинах.

11. Автомобилист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{3}$ всего пути и ещё 100 км, во второй он проехал $\frac{1}{6}$ всего пути и ещё 200 км, а в третий день он проехал $\frac{1}{4}$ всего пути и оставшиеся 50 км. Найдите расстояние между городами (в км).

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 12x + 33)e^{-3-x}$ на отрезке $[-7;\ 0]$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4 - \cos^2 2x = 3\sin^2 2x + 2\sin 4x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 1]$.

14. В основании прямой призмы $MNPM_1N_1P_1$ лежит треугольник MNP со сторонами $MN = NP$, $MP = 6\sqrt{3}$. На ребре NN_1 выбрана точка K так, что $NK : N_1K = 3 : 4$. Угол между плоскостями MNP и MKP равен 60°.

а) Докажите, что расстояние между прямыми MN и M_1P_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми MN и M_1P_1, если $KP = 9$.

15. Решите неравенство $\log_{5-x}(x+5)\cdot\log_{x+4}(4-x)\leqslant 0$.

16. В трапеции $ABCD$ боковая сторона BC перпендикулярна основанию CD. Окружность проходит через точки A и D и касается прямой BC в точке M.

а) Докажите, что $\triangle ABF$ и $\triangle FBK$ подобны, если F — точка пересечения прямой AD с прямой BC, а BK — высота треугольника ABF.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой AD, если $AB = 5$ см, а $CD = 4$ см.

17. Виктор Михайлович положил в банк 96 000 рублей. Несколько лет ему начислялись то 5 %, то 10 % годовых, а за последний год начислили 25 % годовых. При этом проценты начислялись в конце каждого года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 160 083 рублей. Сколько лет пролежал вклад в банке?

18. При каких значениях параметра a область определения функции

$$y=\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{x}\log_a 5-\sqrt{a}\log_a 5-x^{\frac{1}{2}+\log_x(\log_a x)}+\sqrt{a}\log_a x\right)$$

содержит ровно 4 целых числа?

19. Завод выпускает кресла шести видов для детской круглой карусели. Карусель рассчитана на 5 кресел, которые нужно установить. Сколькими способами это можно сделать в каждом из перечисленных случаев, если способы, получающиеся друг из друга поворотом, считать одинаковыми?

а) Все кресла различны.

б) Представлены кресла 4 видов.

в) Каждого вида не более 2 кресел.

Вариант № 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Теплоход рассчитан на 850 пассажиров и 45 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 35 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

2. На графике (рис. 38) показано изменение удельной теплоёмкости водного раствора некоторого вещества в зависимости от температуры. По горизонтали указывается температура в градусах Цельсия, по вертикали — удельная теплоёмкость в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$. Определите по рисунку наименьшую возможную удельную теплоёмкость раствора в диапазоне температур от 20° до 90°. Ответ дайте в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$.

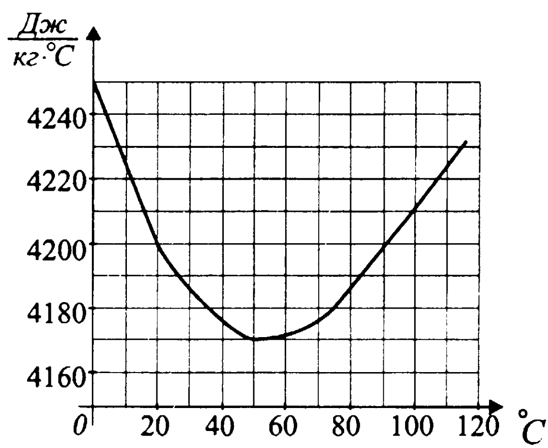


Рис. 38

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён $\triangle ABC$ (см. рис. 39). Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.

4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 120 докладов — первые три дня по 28 докладов, остальные распределены

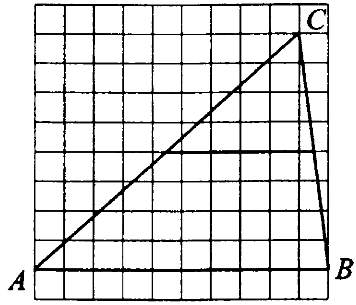


Рис. 39

поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора О. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора О. окажется запланированным на последний день конференции?

5. Найдите корень уравнения $7^{-37+5x} = 343$.

6. Сторона AB треугольника ABC равна 2. Противолежащий ей угол C равен 150° (см. рис. 40). Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

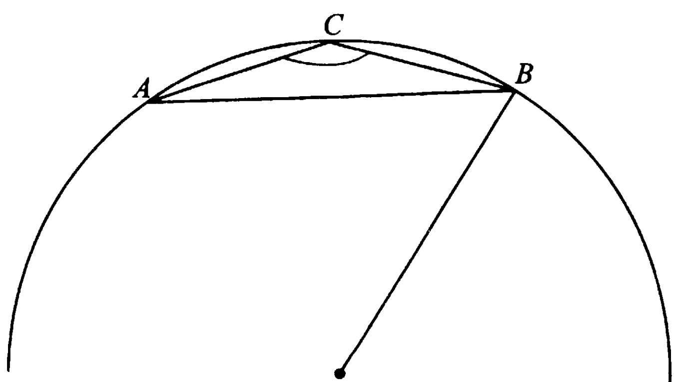


Рис. 40

7. На рисунке 41 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 12)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 10]$.

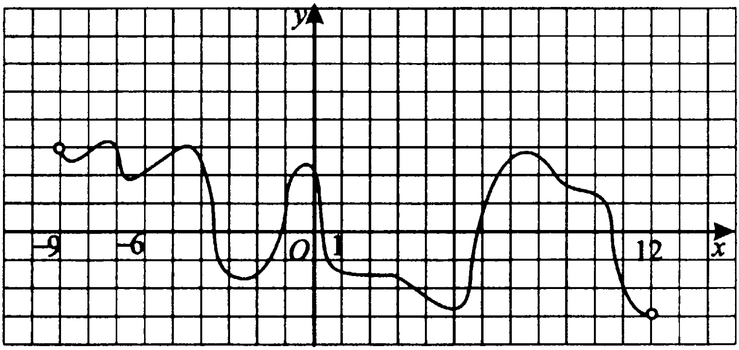


Рис. 41

8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 8$, $AD = 15$, $AA_1 = 1$.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $-38\sqrt{2}\sin(-225°)$.

10. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\,\%$, где T_1 — температура нагревателя (в кельвинах), T_2 — температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет 22 %, если температура холодильника $T_2 = 390$ К? Ответ дайте в кельвинах.

11. Автомобилист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 40 км, во второй он проехал $\frac{1}{3}$ всего пути и ещё 30 км, а в третий день он проехал $\frac{17}{60}$ всего пути и оставшиеся 45 км. Найдите расстояние между городами (в км).

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-23)^2 e^{2x-44}$ на отрезке $[1; 23]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x = 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 16$. На ребре BB_1 выбрана точка F так, что $BF : B_1F = 3 : 5$. Угол между плоскостями AA_1C и AFC равен 45°.

а) Докажите, что расстояние между AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между AB и A_1C_1, если $FC = 10$.

15. Решите неравенство $\log_{x+3}(3 - x) \cdot \log_{6-x}(x + 7) \geqslant 0$.

16. В трапеции $MNPQ$ $MQ \parallel NP$, точка E есть точка пересечения диагоналей трапеции, A — точка пересечения сторон MN и PQ.

а) Докажите, что $MF = FQ$ и $NK = KP$, если точка F — точка пересечения AE с MQ, а K — точка AE с NP.

б) Найдите площадь трапеции, если $MQ : NP = 3 : 2$, $MN = 5$ см, $\angle NMQ = 60°$, $MQ = 12$ см.

17. Иван Петрович разместил в банке 640 тысяч рублей. Несколько лет ему начисляли то 5 %, то 10 % годовых и за последний год начислили 25 % годовых. При этом проценты начислялись в конце каждого года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 1 173 942 рублям. Сколько лет пролежал вклад?

18. При каких значениях параметра a область определения функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}\log_a 3 - \sqrt{a}\log_a 3 - x^{\frac{1}{2}+\log_x(\log_a x)} + \sqrt{a}\log_a x)$ содержит ровно 4 целых числа?

19. У садовника имеются саженцы пяти видов деревьев (саженцы одного вида считаются одинаковыми). Садовнику надо высадить шесть деревьев в ряд — от фонтана до лавочки. Сколькими способами можно высадить деревья в каждом из следующих случаев?

а) У садовника нет дополнительных ограничений.

б) Все виды деревьев должны быть представлены.

в) Должно быть представлено не менее 3 видов деревьев.

Вариант № 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Билет на выставку для взрослого стоит 120 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50 % от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 18 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2. На диаграмме (см. рис. 42) показано число посетителей сайта «Инфоновости» за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число посетителей. Определите по диаграмме номер месяца, когда число посетителей сайта впервые превысило 40 тысяч человек.

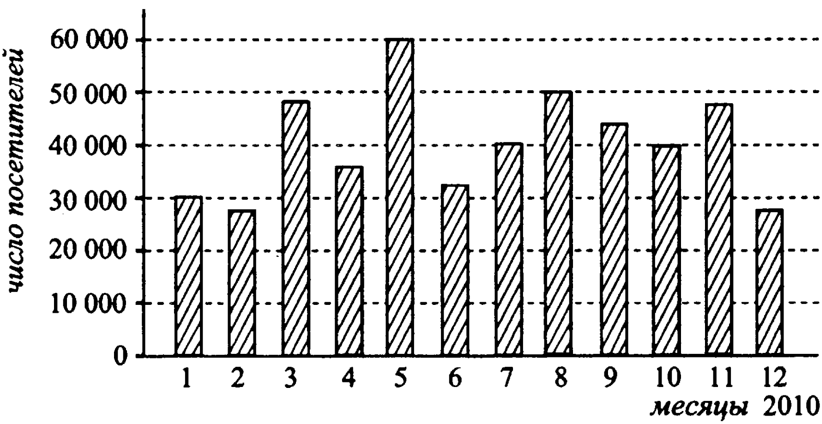


Рис. 42

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён $\triangle ABC$ (см. рис. 43). Найдите радиус описанной около него окружности.

4. В магазине стоят два терминала для оплаты мобильной связи. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,06 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один терминал исправен.

5. Найдите корень уравнения $(5x + 11)^2 = (5x + 24)^2$.

6. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой $2\sqrt{3}$ (см. рис. 44).

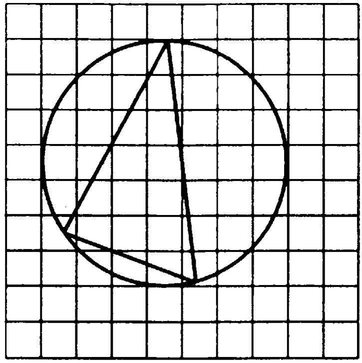


Рис. 43

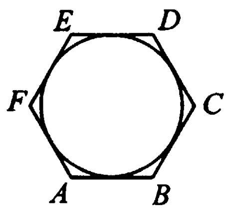


Рис. 44

7. На рисунке 45 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму абсцисс целых точек, входящих в эти промежутки.

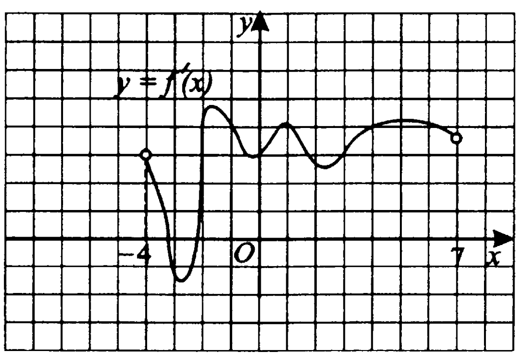


Рис. 45

8. Площадь большого круга шара равна 13,5 (см. рис. 46). Найдите площадь поверхности шара.

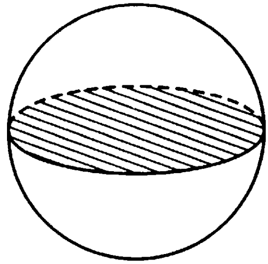


Рис. 46

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{27}{\cos^2 85^\circ + \sin^2 275^\circ}$.

10. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 6$ м. При возрастании температуры происходит расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1+\alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3,24 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

11. Оля и Дима читают одну и ту же книгу. Оля читает за час 50 страниц, а Дима только 30. Дети начали читать книгу одновременно и не прерывались, при этом Оля закончила читать на 36 минут раньше. Сколько страниц текста содержит книга?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 150x$ на отрезке $[2; 10]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4 - \cos^2 3x = 3\sin^2 3x + 2\sin 6x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 1]$.

14. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{2}$. На ребре BB_1 выбрана точка K так, что $BK : B_1K = 2 : 3$. Угол между плоскостями ABC и AKC равен 45°.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1, если $KC = 8$.

15. Решите неравенство $\log_{3-x}(x+3)\cdot\log_{x+5}(5-x) \leqslant 0$.

16. В трапеции $MNPQ$ боковая сторона NP перпендикулярна основанию PQ. Окружность проходит через точки M и Q и касается прямой NP в точке A.

а) Докажите, что ΔMNF и ΔFNK подобны, если F — точка пересечения прямой MQ с прямой NP, а NK — высота треугольника MNF.

б) Найдите расстояние от точки A до прямой MQ, если $MN = 8$ см, а $PQ = 3$ см.

17. Виктор Михайлович положил в банк 200 000 рублей. Несколько лет он получал то 4 %, то 8 % годовых, а за последний год получил 25 % годовых. При этом проценты начислялись в конце каждого года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 292 032 рублям. Сколько лет пролежал вклад?

18. При каких значениях параметра a область определения функции

$$y = \sqrt[10]{a^8x^{0,25} - x^{0,25+x\log_x a} - a^{8,25} + a^x\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}}$$

содержит ровно 7 целых чисел?

19. Завод выпускает кресла семи видов для детской круглой карусели. Карусель рассчитана на 6 кресел, которые нужно установить. Сколькими способами это можно сделать в каждом из перечисленных случаев, если способы, получающиеся друг из друга поворотом, считать одинаковыми?

а) Все кресла различны.

б) Представлены кресла 5 видов.

в) Каждого вида не более 2 кресел.

Вариант № 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 1320 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50 % от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 12 школьников и 4 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2. На диаграмме (см. рис. 47) показано число автомобилей, проданных фирмой за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество автомобилей. Определите по диаграмме номер месяца, когда впервые было продано менее 3000 автомобилей.

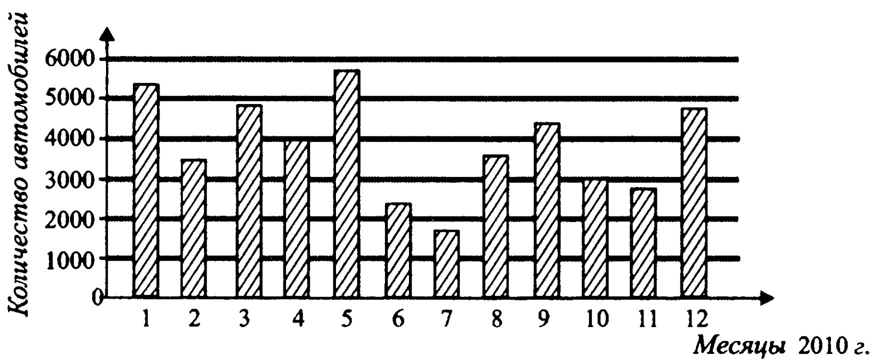


Рис. 47

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён $\triangle ABC$ (см. рис. 48). Найдите радиус описанной около него окружности.

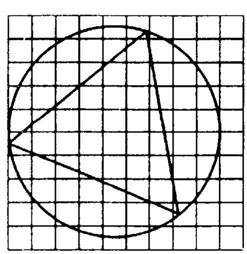


Рис. 48

4. Помещение склада освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,4. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

5. Найдите корень уравнения $(3x - 19)^2 = (3x + 22)^2$.

6. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 49).

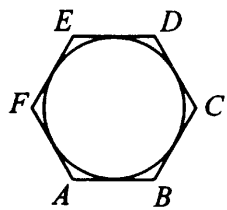


Рис. 49

7. На рисунке 50 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 9)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

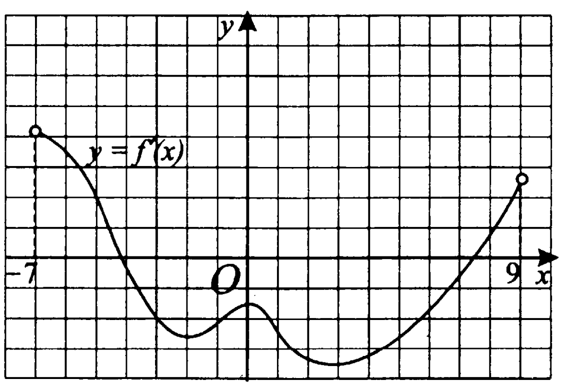


Рис. 50

8. Площадь поверхности шара равна 12 (см. рис. 51). Найдите площадь большого круга шара.

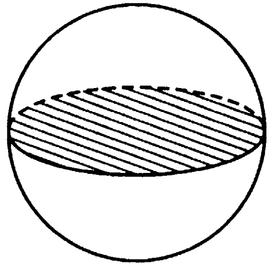


Рис. 51

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{38}{\sin^2 31^\circ + \cos^2 571^\circ}$.

10. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 8$ м. При возрастании температуры происходит расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1+\alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3,84 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

11. Аня и Таня читают одну и ту же книгу. Аня читает за час 42 страницы, а Таня 36. Дети начали читать книгу одновременно и не прерывались, при этом Аня закончила читать на 50 минут раньше. Сколько страниц текста содержит книга?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 5x^3 - 135x + 20$ на отрезке $[-8; 0]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4\sqrt{3}\sin x - \sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x - 4\cos x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14. В основании прямой призмы $MNPM_1N_1P_1$ лежит равнобедренный треугольник MNP, в котором $MN = NP$, $MP = 24$. На ребре NN_1

выбрана точка F так, что $NF : N_1F = 2 : 3$. Угол между плоскостями MM_1P и MFP равен $60°$.

а) Докажите, что расстояние между MN и M_1P_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между MN и M_1P_1, если $FP = 16$.

15. Решите неравенство $\log_{x+4}(4-x)\cdot\log_{5-x}(x+6)\leqslant 0$.

16. В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, точка E есть точка пересечения диагоналей трапеции, P — точка пересечения сторон AB и CD.

а) Докажите, что $AF = FD$ и $BK = KC$, если точка F — точка пересечения PE с AD, а K — точка пересечения PE с BC.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD : BC = 4 : 3$, $AB = 10$ см, $\angle BAD = 45°$, $AD = 18$ см.

17. Иван Петрович разместил в банке 400 тысяч рублей. Несколько лет он получал то 5 %, то 10 % годовых, а за последний год получил 20 % годовых. При этом проценты начислялись в конце каждого года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 640 332 рублям. Сколько лет пролежал вклад?

18. При каких значениях параметра a область определения функции $y = \sqrt[8]{a^4x^{0,5} - x^{0,5+x\log_x a} - a^{4,5} + a^x\sqrt{a}}$ содержит ровно 3 целых числа?

19. У садовника имеются саженцы шести видов деревьев (саженцы одного вида считаются одинаковыми). Садовнику надо высадить семь деревьев в ряд — от фонтана до лавочки. Сколько способов высадить деревья в каждом из следующих случаев?

а) у садовника нет дополнительных ограничений

б) все виды деревьев должны быть представлены

в) должно быть представлено не менее 3 видов деревьев

Вариант № 13

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. Заработная плата Александра Валентиновича равна 22 800 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме (см. рис. 52) показана среднемесячная температура воздуха в Ростове-на-Дону за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 2010 г. было месяцев, когда среднемесячная температура опускалась ниже 10 градусов Цельсия.

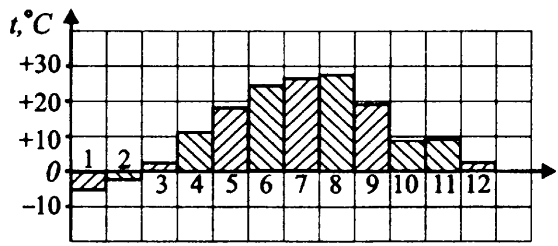


Рис. 52

3. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 29$, $BC = 27$ и $CD = 28$ (см. рис. 53). Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

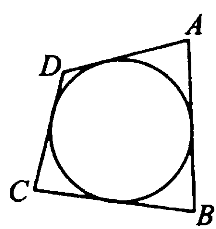


Рис. 53

4. На экзамене по литературе школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Проза XIX века», равна 0,28. Вероятность того, что это вопрос по теме «Проза XX века», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся

к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5. Найдите корень уравнения $4^{x-16} = \frac{1}{64}$.

6. Найдите угол ABC (см. рис. 54). Ответ дайте в градусах.

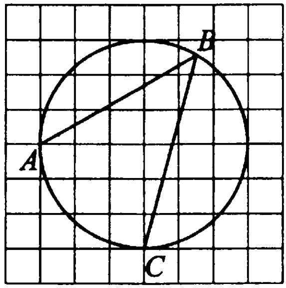


Рис. 54

7. На рисунке 55 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 10)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

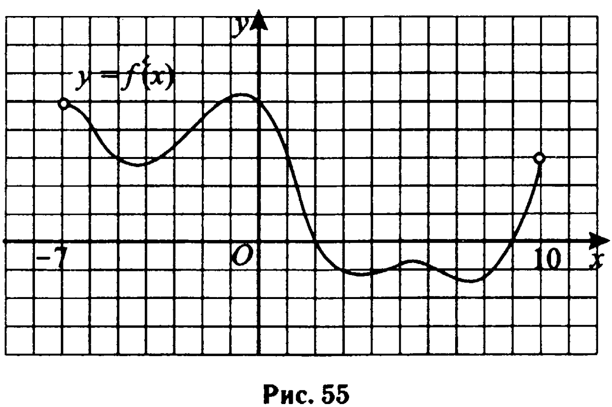


Рис. 55

8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 56 (все двугранные углы прямые).

Часть 2

9. Найдите $\operatorname{tg}\beta$, если $\cos\beta = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ и $\beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

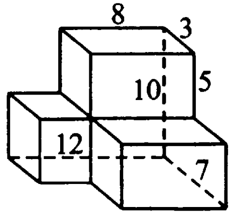


Рис. 56

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 10^7$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе (в киловольтах), если после выключения телевизора прошло не менее 42 с.

11. Строительные фирмы учредили компанию с уставным капиталом 150 млн рублей. Первая фирма внесла 20 % уставного капитала, вторая фирма — 22,5 млн рублей, третья — 0,3 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внесла четвёртая фирма.

Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставный капитал вкладу. Какая сумма от прибыли в 100 млн рублей причитается четвёртой фирме? Ответ дайте в миллионах рублей.

12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 5x + 24$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{|\sin x|}{\sin x} + 2 = 2\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 8]$.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точка M является серединой отрезка BC_1.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую AM, параллельно прямой A_1B.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

15. Решите неравенство $\dfrac{\dfrac{3}{2x+1}+\log_2\dfrac{x+2}{4}}{\sqrt{-x}} > 0.$

16. Точка O лежит в плоскости квадрата $ABCD$. Известно, что точка O лежит вне квадрата, $OA = OB = 5$, $OD = \sqrt{13}$.

а) Докажите, что площадь квадрата $ABCD$ меньше 36.

б) Найдите площадь квадрата $ABCD$.

17. В первом отделении банка 45 % от общего числа клиентов составляют бюджетные организации и 55 % частные клиенты, во втором отделении 10 % составляют корпоративные клиенты, 40 % бюджетные организации и 50 % частные клиенты, в третьем отделении 30 % корпоративные клиенты, 70 % частные клиенты. После объединения трёх отделений корпоративные клиенты составляют 15 %. Найдите промежуток, в пределах которого может находиться процент частных клиентов.

18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ xy = a-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

19. Дан набор из n различных натуральных чисел. Известно, что $n > 7$, наименьшее общее кратное всех чисел равно 330 и для любых двух чисел их наибольший общий делитель больше единицы. Сумма всех чисел данного набора равна 755.

а) Принадлежит ли данному набору чисел хотя бы одно из чисел 2 или 3?

б) Принадлежит ли 10 данному набору чисел?

в) Укажите все n чисел данного набора.

Вариант № 14

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. После удержания налога на доходы Ирина Николаевна получила 24 360 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Ирины Николаевны?

2. На диаграмме (см. рис. 57) показана месячная норма осадков для города Красноярска. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество осадков в мм. Определите число месяцев, для каждого из которых норма осадков составляет менее 30 мм.

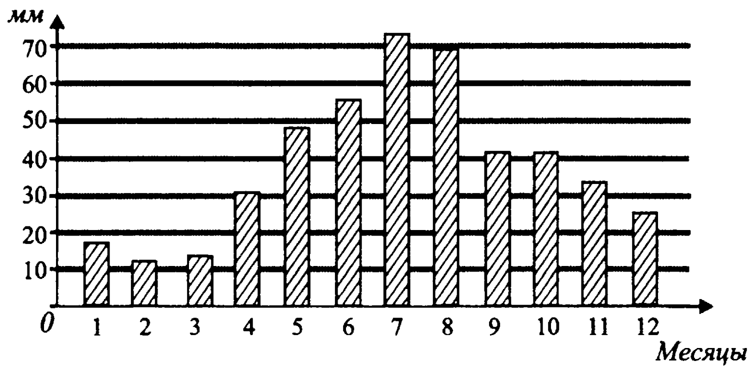


Рис. 57

3. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $BC = 7$ и $CD = 19$ (см. рис. 58). Найдите периметр четырёхугольника.

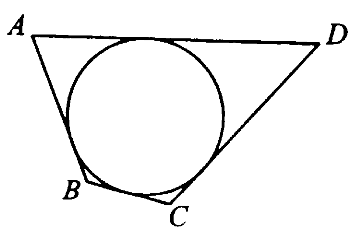


Рис. 58

4. На экзамене по истории школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме

«История Древнего мира», равна 0,06. Вероятность того, что это вопрос по теме «История эпохи Возрождения», равна 0,22. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{18-5x} = 9$.

6. Найдите градусную меру дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC (см. рис. 59). Ответ дайте в градусах.

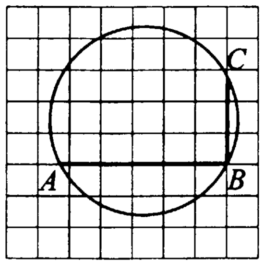


Рис. 59

7. На рисунке 60 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

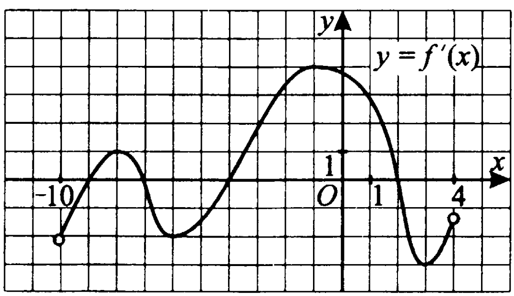


Рис. 60

8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 61 (все двугранные углы прямые).

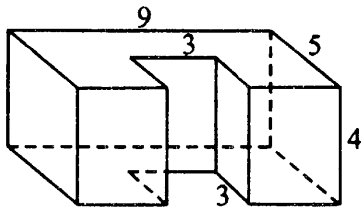


Рис. 61

Часть 2

9. Найдите $\operatorname{tg}\gamma$, если $\sin\gamma = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ и $\gamma \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

10. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $v = 40$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}3$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 3{,}5$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 126 000 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

11. Строительные фирмы учредили компанию с уставным капиталом 400 млн рублей. Первая фирма внесла 40 % уставного капитала, вторая фирма — 40 млн рублей, третья — 0,2 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внесла четвёртая фирма.

Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставный капитал вкладу. Какая сумма от прибыли в 250 млн рублей причитается четвёртой фирме? Ответ дайте в миллионах рублей.

12. Найдите точку максимума функции $y = 63 + 20x - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{|\sin x|}{\sin x} - 2 = 2\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2; 10]$.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 точка M является серединой отрезка A_1C_1.

а) Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую BM параллельно прямой AB_1.

б) Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BM.

15. Решите неравенство $\sqrt{1-x}\left(\log_3 x - 1 + \frac{3}{2x-1}\right) > 0$.

16. Точка O лежит в плоскости квадрата $ABCD$. Известно, что площадь квадрата больше 225, $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что точка O лежит внутри квадрата $ABCD$.

б) Найдите длину стороны квадрата $ABCD$.

17. В первом отделении банка 30 % от общего числа клиентов составляют корпоративные клиенты и 70 % бюджетные организации, во втором отделении — 10 % бюджетные организации и 90 % частные клиенты, в третьем отделении – 15 % корпоративные клиенты, 25 % бюджетные организации, 60 % частные клиенты. После объединения трёх отделений частные клиенты составляют 40 %. Найдите промежуток, в пределах которого может находиться процент бюджетных организаций.

18. Найдите все значения параметра а, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1), \\ \left(x+y\right)^2 = 14, \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

19. Дан набор из n различных натуральных чисел. Известно, что $n>7$, наименьшее общее кратное всех чисел равно 210 и для любых двух чисел их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа.

а) Принадлежит ли 3 данному набору чисел?

б) Принадлежит ли 2 данному набору чисел?

в) Укажите все n чисел данного набора.

Вариант № 15

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Флакон жидкого мыла стоит 180 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25 %?

2. На графике (см. рис. 62) показано изменение скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не более 70 км/ч?

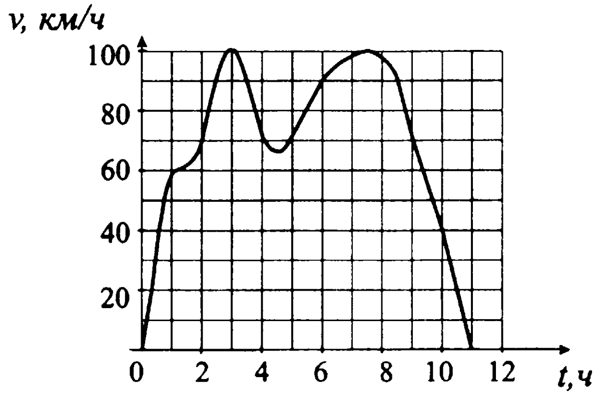


Рис. 62

3. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 84, средняя линия равна 17 (см. рис. 63). Найдите боковую сторону трапеции.

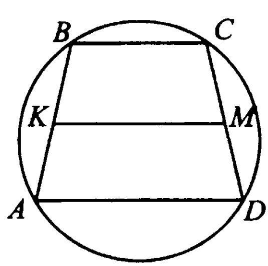


Рис. 63

4. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 игроков, среди которых 13 спортсменов из России, в том числе Артём Веселов. Найдите вероятность того, что в первом туре Артём Веселов будет играть с каким-либо участником соревнований из России.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{1}{3x-51}}=\dfrac{1}{6}$.

6. Хорда AB стягивает дугу окружности в 84°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B (см. рис. 64). Ответ дайте в градусах.

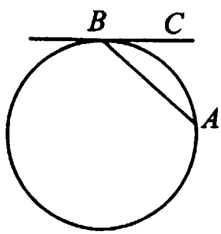


Рис. 64

7. Прямая $y = -8x + 1$ параллельна касательной к графику функции $y = 2x^2 - 2x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 65 (все двугранные углы прямые).

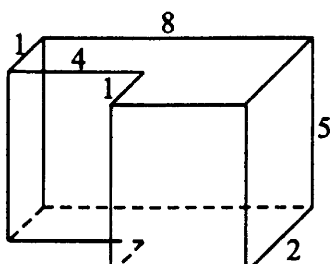


Рис. 65

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{11\cos(\pi+\beta)+4\sin(\frac{3\pi}{2}+\beta)}{\cos(\beta-5\pi)}$.

10. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega=20°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $2400°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

11. Баржа в 8:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 21 км по реке от пункта A. Пробыв в пункте B 1 час, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи 8 км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=4x\sqrt{x}-24x+38$ на отрезке $[1;16]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|}{\cos x}-2=2\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1;7]$.

14. Точки M и N — середины боковых ребер SA и SB правильной треугольной пирамиды $SABC$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через прямую MN.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости сечения, если $AB=30$, $AS=28$.

15. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(3^x - 4\cdot 3^{-x} - 6) + 3x}{2x+1} \geqslant 1.$

16. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC соответственно равны 9 и 12, а $BC = 14$.

а) Докажите, что площадь треугольника A_1OB в два раза меньше площади четырёхугольника OA_1CB_1, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC;

б) Вычислите площадь треугольника ABC.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x = y + \ln \dfrac{|y|}{y}, \\ y + 2(x+a)^2 = x + 2a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Дан набор из n различных натуральных чисел. Известно, что $n > 7$, наименьшее общее кратное всех чисел равно 510 и для любых двух чисел их наибольший общий делитель больше единицы. Сумма всех чисел данного набора равна 864.

а) Принадлежит ли данному набору чисел чётное число?

б) Принадлежит ли данному набору чисел число 5?

в) Принадлежит ли число 30 данному набору чисел?

Вариант № 16

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Гелевая ручка стоит 15 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 800 рублей после повышения цены на 20 %?

2. На графике (см. рис. 66) показано изменение скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не менее 70 км/ч?

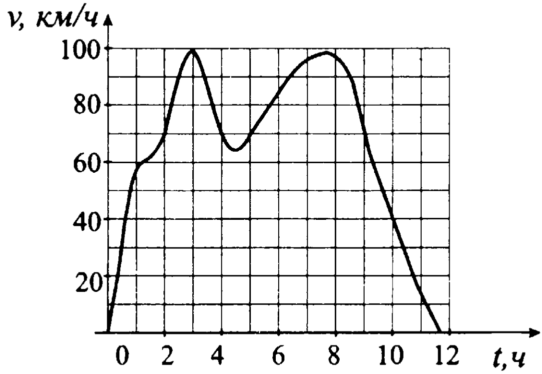


Рис. 66

3. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 72, боковая сторона $AB = 8$. Найдите среднюю линию трапеции (см. рис. 67).

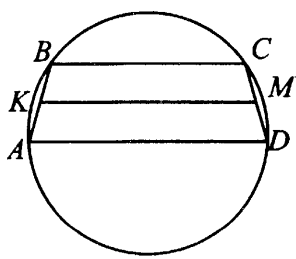


Рис. 67

4. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 46 спортсменов, среди которых 19 — из России, в том числе Игорь Добродушев. Найдите вероятность того, что в первом туре Игорь Добродушев будет играть с каким-либо спортсменом из России.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{1}{19+3x}} = 0{,}25$.

6. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 41°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB (см. рис. 68). Ответ дайте в градусах.

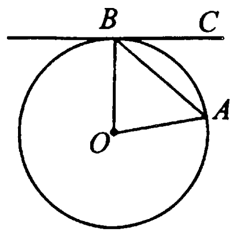


Рис. 68

7. Прямая $y = 4x + 3$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + \frac{5}{4}$. Найдите абсциссу точки касания.

8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 69 (все двугранные углы прямые).

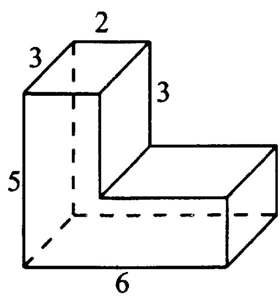


Рис. 69

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin(\alpha - 9\pi) + 19\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha + 13\pi)}$.

10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1492$ К, $a = -17$ К/мин^2, $b = 153$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1730 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите наибольшее время после начала работы прибора, через которое его нужно отключить. Ответ выразите в минутах.

11. Баржа в 6:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 60 км по реке от пункта A. Пробыв в пункте B 3 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 20:00. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи 11 км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 12x + 6$ на отрезке $[1; 81]$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|}{\cos x} + 2 = 2\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 9]$

14. M — точка пересечения медиан грани SAB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M, перпендикулярной плоскости ABC и параллельной ребру AB.

б) Найдите расстояние от ребра AB до плоскости сечения, если $AB = 5\sqrt{2}$, $AS = 13$.

15. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 7) + 2x}{x + 1} \geqslant 1$.

16. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC соответственно равны 15 и 12, а $BC = 18$.

а) Докажите, что площадь треугольника AOB равна площади четырёхугольника OA_1CB_1, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC;

б) Вычислите площадь четырёхугольника OA_1CB_1.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 19 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y+1 = x + \ln\dfrac{|x-1|}{x-1}, \\ x + 2(y-a)^2 = y + 2a + 13 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Дан набор из n различных натуральных чисел. Известно, что $n > 7$, наименьшее общее кратное всех чисел равно 570 и для любых двух чисел их наибольший общий делитель больше единицы. Сумма всех чисел данного набора равна 1 220.

а) Принадлежит ли данному набору чисел число 2?

б) Принадлежит ли число 38 данному набору чисел?

в) Укажите все n чисел данного набора.

Вариант № 17

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Среди 60 000 жителей города 80 % не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 70 % смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч по телевизору?

2. На графике (см. рис. 70) показано изменение температуры воздуха с 14 по 30 декабря. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха за этот период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

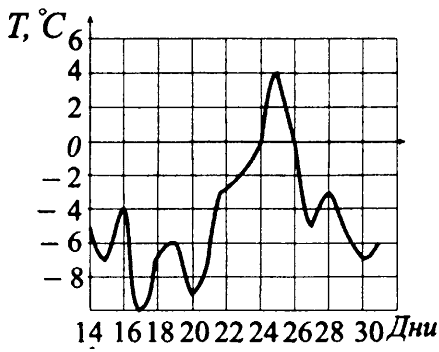


Рис. 70

3. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 47. Найдите её среднюю линию (см. рис. 71).

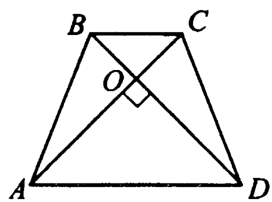


Рис. 71

4. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка сломалась, достигнув отметки 4, но не дойдя до отметки 7.

5. Найдите корень уравнения $3^{39-7x} = 81$.

6. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 8 и 4, бо́льшая боковая сторона составляет с основанием угол 45° (см. рис. 72).

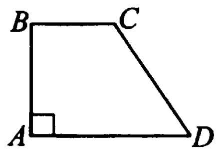


Рис. 72

7. На рисунке 73 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 3$ или совпадает с ней.

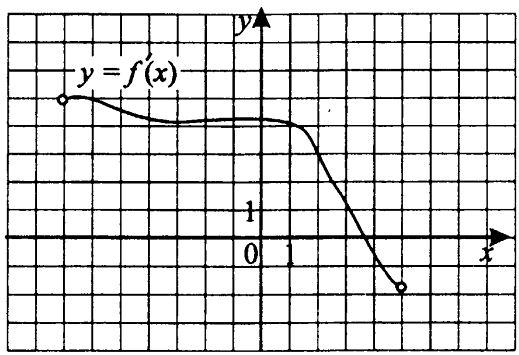


Рис. 73

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы (см. рис. 74), налили 357 см^3 воды и полностью в неё погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 14 см до отметки 18 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в сантиметрах кубических.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{16x^2 - 25}{4x - 5} - 4x + 1$.

10. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота зву-

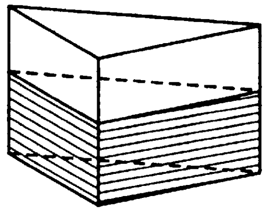


Рис. 74

кового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 250$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с); $u = 20$ м/с и $v = 5$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 270 Гц?

11. Мотоциклист проехал расстояние в 180 км от A до B с постоянной скоростью. На следующий день он проехал это же расстояние от B до A со скоростью на 10 км/ч меньше прежней. По дороге он сделал остановку на 24 минуты и на путь из B в A затратил на 1 час больше, чем потратил на дорогу из A в B. Найдите скорость мотоциклиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 19600}{x}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение: $0{,}5\sin^2 6x - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = 0$.

б) Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

14. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина, BD — диагональ основания) образует с основанием угол 45°, сторона основания равна 4.

Через среднюю линию треугольника ABD, не пересекающую BD и середину высоты пирамиды, проведена плоскость α.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α и докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру SC.

б) Найдите объём пирамиды $SKLM$, где K, L и M точки пересечения α соответственно с рёбрами SB, SD и SC.

15. Решите неравенство $\frac{1}{2}\log_{x-2}(x^2-10x+25)+\log_{5-x}(-x^2+7x-10) > 3$.

16. В заданный угол, величиной α, не превосходящей π, вписаны две произвольные, касающиеся друг друга окружности.

а) Докажите, что отношение модуля разности радиусов к сумме радиусов этих окружностей является постоянной величиной.

б) Найдите радиус меньшей из указанных окружностей, если радиус большей окружности равен 10, а угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

17. Два индивидуальных предпринимателя занимались изготовлением зеркал.

В течение ряда лет первый предприниматель изготавливал одно и то же (но не более 210) количество зеркал за каждый год.

Второй предприниматель в этот период изготавливал за каждый год 90 % от того количества зеркал, которое изготавливал первый предприниматель.

После обновления оборудования второй предприниматель стал изготавливать за каждый год на 80 % больше, чем он изготавливал до этого обновления, и более, чем 244 зеркала.

Найдите, какое количество зеркал за каждый год после обновления оборудования стал выпускать второй предприниматель?

Каждый предприниматель за год изготавливает целое число зеркал.

18. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (x-(3a^2+1))^2+y^2 = a^2(9a^2+1), \\ y = ax^3; \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Билеты в одной из лотерей стали нумеровать парами натуральных чисел. Накануне розыгрыша просочилась информация о стратегиях формирования выигрышных билетов:

(1). Наряду с каждым выигрышным билетом $(a; b)$ билет $(b; a)$ также является выигрышным.

(2). Если билеты $(a; b)$ и $(b; c)$ являются выигрышными, то билет $(a; c)$ также является выигрышным.

(3). Если $(a; b)$ является выигрышным, то выигрышным является и билет $(a \cdot c; b \cdot c)$ для любого натурального числа с.

Одному математику дополнительно стало известно, что билет (6; 9) является выигрышным. Из всех билетов, предложенных ему для покупки, он стал выбирать только указанные ниже. Докажите, что все они являются выигрышными.

а) $(12; 18)$; $(12; 27)$; $(24; 81)$.

б) $(3 \cdot 2^k; 3 \cdot 3^k)$ для любого натурального k.

в) $(3 \cdot 2^m \cdot 3^n; 3 \cdot 2^p \cdot 3^q)$, где $m, n, p, q \in N$ $m + n = p + q$.

Вариант № 18

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В городе N живет 280 000 жителей. Среди них 35 % детей и подростков. Среди взрослых жителей 40 % не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

2. На рисунке 75 точками показано количество золотовалютных резервов в России за период с 10 по 20 февраля 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество золотовалютных резервов в миллиардах долларов США. Для наглядности точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим количествами золотовалютных резервов в период с 11 по 17 февраля (в миллиардах долларов США).

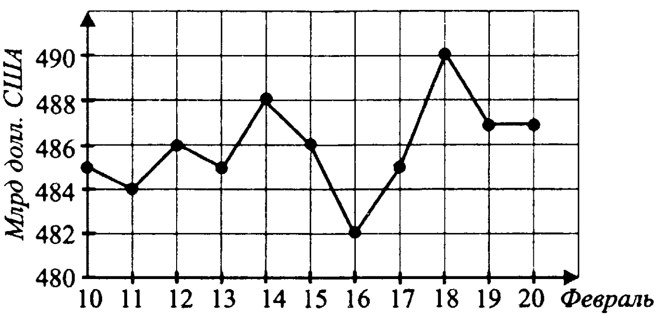


Рис. 75

3. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Средняя линия трапеции равна 91 (см. рис. 76). Найдите её высоту.

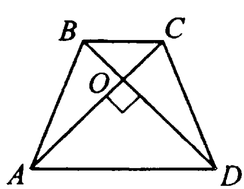


Рис. 76

4. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка сломалась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

5. Найдите корень уравнения $5^{45-x} = 25^{7x}$.

6. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 6 (см. рис. 77). Её площадь равна 54. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

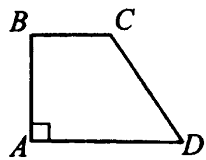


Рис. 77

7. На рисунке 78 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

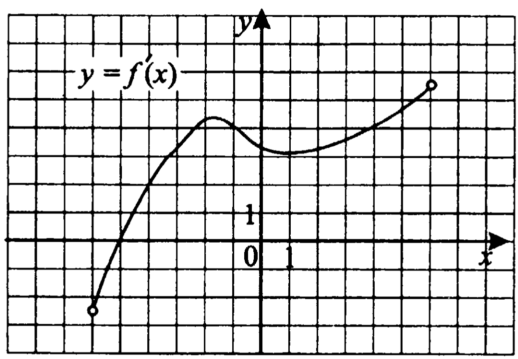


Рис. 78

8. В цилиндрический сосуд налили 5000 см^3 воды (см. рис. 79). Уровень воды при этом достигает высоты 24 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 18 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

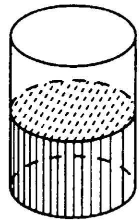


Рис. 79

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{9-49x^2}{3-7x}-7x+5$.

10. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 320$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0\dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с); $u = 40$ м/с и $v = 2$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 360 Гц?

11. Велосипедист проехал расстояние в 120 км от A до B с постоянной скоростью. На следующий день он проехал это же расстояние от B до A со скоростью на 5 км больше прежней. По дороге он сделал две остановки по 1 часу, однако в пункт A он добрался за то же время, что и потратил на дорогу из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2+25600}{x}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 6x + \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = 1$.

б) Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

14. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина, BD — диагональ основания) образует с основанием угол 60°, сторона основания равна 4,8.

Через среднюю линию треугольника ABD, не пересекающую BD, и точку на высоте пирамиды, отстоящей от основания на $\frac{1}{6}$ всей высоты пирамиды, проведена плоскость α.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α и докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру SC.

б) Найдите объём пирамиды $SKLM$, где K, L и M точки пересечения α соответственно с рёбрами SB, SD и SC.

15. Решите неравенство.

$$\frac{1}{4}\log_x(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + \log_{1-x}(-x^2 + x) > 3$$

16. Три окружности с заданными радиусами r_1, r_2 и r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$) вписаны в некоторый угол, величина которого не превосходит π. Окружность с радиусом r_3 касается окружности с радиусом r_2, а окружность с радиусом r_2 касается окружности с радиусом r_1.

а) Докажите, что справедливы следующие равенства:

$$\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{r_3 - r_2}{r_3 + r_2} = \frac{r_3 - r_1}{r_3 + 2r_2 + r_1}.$$

б) Найдите величину указанного угла, если $r_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, а $r_2 = 1$.

17. В продовольственном ларьке за одну неделю продали 46 килограммовых пачек пельменей категорий А, Б и В.

При этом пельменей категории А продано меньше, чем пельменей категории В, а пельменей категории Б продано в 10 раз больше, чем пельменей категории В.

Найдите, сколько пачек пельменей категории А было продано за указанную неделю?

18. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{a^2+2}{4}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2(a^2+1)}{16}, \\ y = ax^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Пусть M — некоторое множество точек координатной плоскости с натуральными координатами, содержащее пару $(4; 6)$. Точки множества M симметричны относительно прямой $y = x$.

Кроме того, M обладает двумя свойствами:

(1). Если точка $(a; b)$ принадлежит M, то для любого натурального числа c точка $(a \cdot c; b \cdot c)$ принадлежит M;

(2). Если точки $(a; b)$ и $(b; c)$ принадлежат M, то точка $(a; c)$ также принадлежит M.

Докажите, что все указанные ниже точки принадлежат множеству M.

а) $(8; 12)$; $(8; 18)$; $(16; 54)$.

б) $(2 \cdot 2^k; 2 \cdot 3^k)$ для любого натурального k.

в) $(2 \cdot 2^m \cdot 3^n; 2 \cdot 2^p \cdot 3^q)$, где $m, n, p, q \in N$, $m + n = p + q$.

Вариант № 19

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В доме, в котором живёт Лиза, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Лиза живёт в квартире 57. На каком этаже живёт Лиза?

2. На рисунке 80 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку, на сколько градусов Цельсия наибольшая температура 13 мая превышала наибольшую температуру 11 мая.

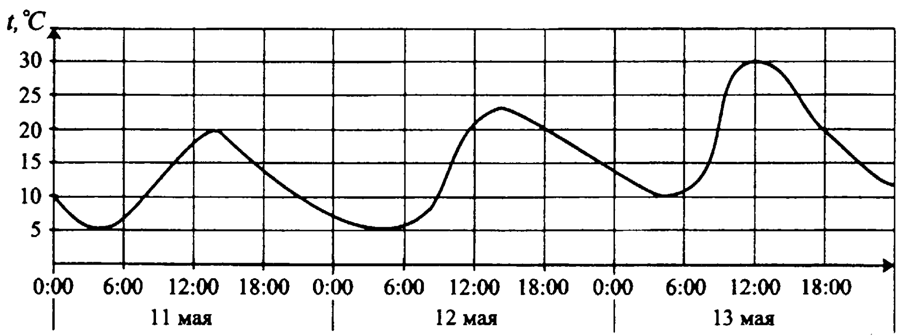


Рис. 80

3. На рисунке 81 угол 1 равен 32°, угол 2 равен 47°, угол 3 равен 29° (см. рис. 81). Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.

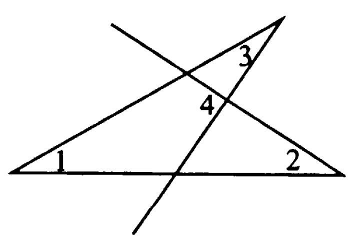


Рис. 81

4. В чемпионате по гимнастике участвуют 40 спортсменок: 19 из России, 13 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают

гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{2x+11} = -5$.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° (см. рис. 82). Боковая сторона треугольника равна 11. Найдите площадь этого треугольника.

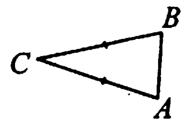


Рис. 82

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t^2 - 5t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 4$ с.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 83 (все двугранные углы прямые).

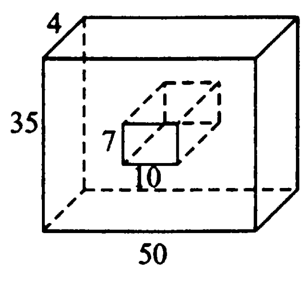


Рис. 83

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{7\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}} - \dfrac{9\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

10. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \dfrac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 80 В? Ответ выразите в омах.

11. Вторая труба пропускает в минуту на 6 л воды меньше, чем первая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 140 л она заполнит на 5 минут быстрее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 100 л?

12. Найдите точку максимума функции $y = 4x^2 - 26x + 15\ln x + 27$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin^3 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos x}$.

б) Укажите все корни, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\dfrac{5}{2}\pi\right]$.

14. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 6. Боковое ребро наклонено к основанию под углом 45°. Через меньшую диагональ основания AC проведено сечение, которое пересекает противоположное к ней ребро пирамиды SE на расстоянии $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ от вершины пирамиды S.

а) Докажите, что это сечение перпендикулярно боковому ребру SE.

б) Найдите площадь сечения.

15. Решите неравенство $\dfrac{12\cdot 3^x + 61}{9^x - 6\cdot 3^x - 27} \leqslant -2{,}25$.

16. Две окружности одинакового радиуса касаются внутренним образом третьей окружности в точках, являющихся концами дуги l большей окружности, равной 90°.

а) Докажите, что окружности меньшего радиуса касаются друг друга, если радиус большей окружности равен $1+\sqrt{2}$, а радиусы меньших окружностей равны 1.

б) Найдите площадь треугольника O_1O_2K, где O_1 и O_2 — центры меньших окружностей, а K делит дугу l', дополняющую дугу l до полной окружности, в отношении 1 : 5 от одной из точек касания.

17. 15 мая бизнесмен запланировал взять кредит в банке в размере 12 млн рублей на 19 месяцев.

Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом прошлого месяца;

— со 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем долг на 15 число предыдущего месяца.

На сколько процентов больше по отношению к взятому кредиту придётся заплатить бизнесмену?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 - 2\sqrt{2}(x+y)(x^2+y^2) + 8xy = 0, \\ y - x = a, \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

19. Для получения членства в одном престижном клубе проводится отбор. Каждый из претендентов вносит залог, который является целым неотрицательным числом тысяч. Сумма залога в 150 тысяч гарантирует получение членства.

После окончания сроков приёма залога с целью увеличения численности клуба руководство приняло решение добавить к сумме залога каждого из претендентов 10 тысяч.

а) Могло ли оказаться так, что после этого понизится средняя сумма залога у тех, кто не достиг достаточной суммы?

б) Могло ли оказаться так, что после этого понизится средняя сумма залога у тех, кто достиг достаточной суммы, и тех, кто не достиг достаточной суммы?

в) Известно, что первоначально средняя сумма залога всех участников составила 130 тысяч, средняя сумма тех, кто сдал достаточную сумму, составила 160 тысяч, а у тех, кто не сдал достаточной суммы, она составила 125 тысяч.

После добавления 10 тысяч средняя сумма залога среди тех, кто достиг достаточной суммы, составила 155 тысяч, а средняя сумма залога у тех, кто не достиг достаточной суммы, составила 120 тысяч. При каком наименьшем числе участников возможна такая ситуация?

Вариант № 20

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В доме, в котором живёт Таня, 12 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Маша живёт в квартире 184. В каком подъезде живёт Маша?

2. На рисунке 84 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха 8 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.

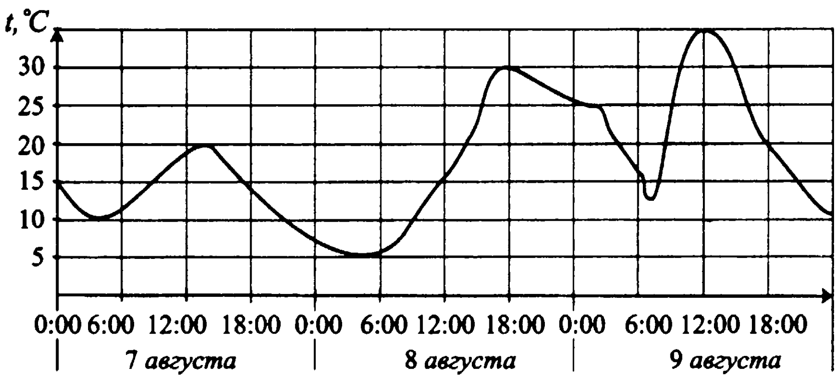


Рис. 84

3. На рисунке 85 угол 1 равен 40°, угол 2 равен 28°, угол 4 равен 105° (см. рис. 85). Найдите угол 3. Ответ дайте в градусах.

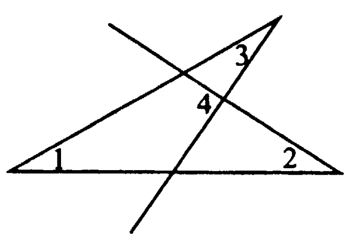


Рис. 85

4. На семинар приехали 5 учёных из Швеции, 8 из России и 7 из Мексики. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым окажется доклад учёного из России.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{5x-16} = 7$.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° (см. рис. 86). Найдите боковую сторону этого треугольника, если его площадь равна 56,25.

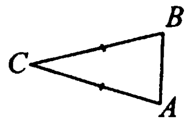


Рис. 86

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 44t + 9$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 8$ с.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 87 (все двугранные углы прямые).

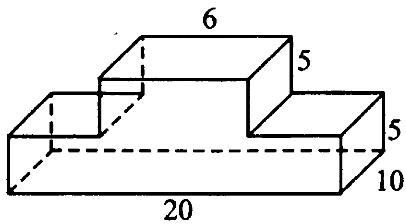


Рис. 87

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \dfrac{5\sqrt{x}}{x}$ при $x = 2+\sqrt{3}$.

10. В розетку подключены электроприборы, общее сопротивление которых составляет 60 Ом. Параллельно с ними в розетку планируется подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление обогревателя (в Омах), если для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не менее

24 Ом, а общее сопротивление проводников при параллельном подключении вычисляется по формуле $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$, где R_1 и R_2 — сопротивления этих проводников.

11. Первая труба пропускает в минуту на 4 л воды больше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 320 л она заполнит на 10 минут быстрее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 360 л?

12. Найдите точку минимума функции $y = 5x^2 - 9x + 2\ln x - 24$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos^3 x = \dfrac{1 - \sin^2 x}{2\sin x}$;

б) Укажите все корни, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 6. Боковое ребро наклонено к основанию под углом $60°$. Через меньшую диагональ основания AC проведено сечение, которое пересекает высоту пирамиды в точке, удалённой от основания на расстояние $\sqrt{3}$.

а) Докажите, что это сечение перпендикулярно противоположному к AC боковому ребру пирамиды SE.

б) Найдите площадь сечения.

15. Решите неравенство $\dfrac{5^x + 1}{5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5} \geqslant -\dfrac{1}{11}$.

16. Две окружности одинакового радиуса касаются внутренним образом третьей окружности в точках, являющихся концами дуги l большей окружности, равной $90°$.

а) Докажите, что если радиус большей окружности равен $1 + \sqrt{2}$, а радиус меньших окружностей равен $\dfrac{5}{4}$, то окружности меньшего радиуса пересекаются в двух точках.

б) Найдите квадрат расстояния между точками пересечения окружностей меньшего радиуса, при выполнении условий указанных в пункте а).

17. 15 декабря бизнесмен запланировал взять кредит в банке в размере 5 млн рублей на 9 месяцев.

Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2,5 % по сравнению с концом прошлого месяца;

— со 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем долг на 15 число предыдущего месяца.

На сколько рублей больше выплатил бизнесмен по сравнению с суммой кредита? Ответ укажите в млн рублей.

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - x^2(2\sqrt{x} - y^2 + 2\sqrt{2}y - y^2) + (2\sqrt{2}x - y^2)(2\sqrt{2}y - y^2) = 0, \\ y + x = a, \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

19. В соревнованиях по стрельбе для выхода в финал достаточно набрать 128 очков. По окончании стрельбы, ввиду обнаруженных нарушений правил, было принято решение снять с каждого из участников по 4 очка.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл тех, кто не набрал достаточное число очков, повысился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого среднее число очков у тех, у кого оказалось не менее 128 очков, и среднее количество очков у тех, у кого оказалось менее 128 очков, повысился?

в) Известно, что первоначальное среднее число очков, набранных всеми участниками, равно 120. Среднее число очков у тех, кто набрал не менее 128 очков, равно 132, а среднее число очков у тех, кто набрал меньше 128 очков, равно 118.

После снятия очков среднее число очков у тех, у кого осталось не менее 128 очков, стало равно 128, а среднее число очков у тех, у кого оказалось менее 128 очков, стало равно 114.

При каком наименьшем числе участников соревнований возможна указанная ситуация?

Вариант № 21

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Поезд Ростов-на-Дону — Сочи отправляется в 15:50, а прибывает в 4:50 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2. На диаграмме 88 показано распределение производства карамелек на 10 специализированных фабриках за 2014 год. Среди представленных фирм первое место по количеству производимых карамелек занимает «Хруст», десятое — «Весна». Какое место занимает «Радость дантиста»?

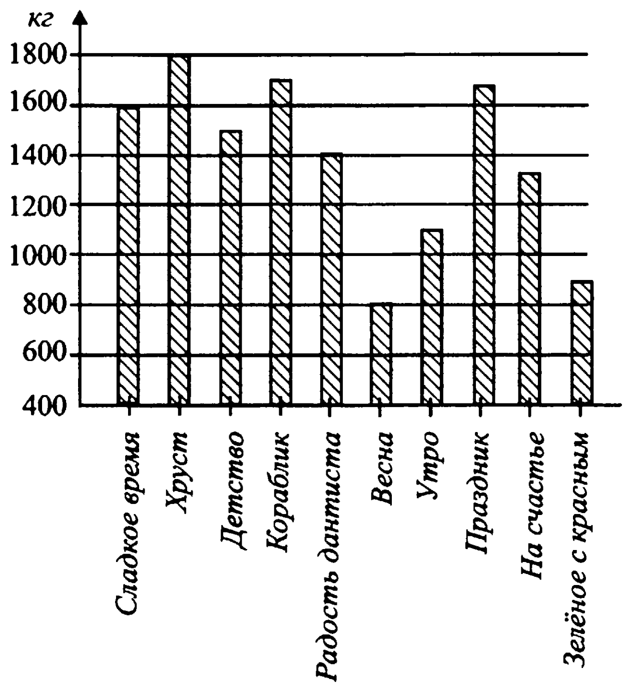


Рис. 88

3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размерами клетки 1 см×1 см (см. рис. 89). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

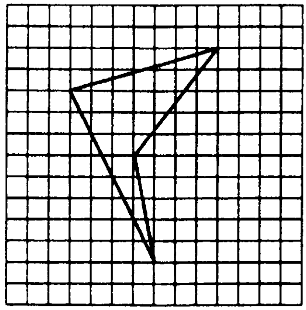


Рис. 89

4. В некотором городе из 8 000 появившихся на свет младенцев 4 140 мальчики. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

5. Найдите корень уравнения $\log_{14}(x-3) = \log_{14}(8x-31)$.

6. У треугольника со сторонами 12 и 8 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 4 (см. рис. 90). Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

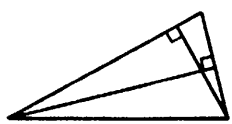


Рис. 90

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 5t + 18$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 10 м/с?

8. В прямой призме, изображённой на рисунке 91, основанием является квадрат со стороной 4. Боковое ребро призмы — $\frac{8}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

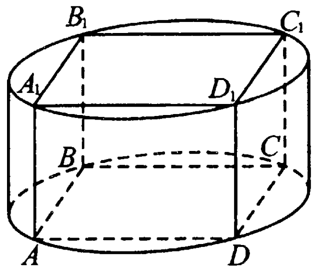


Рис. 91

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left((7x+5y)^2-49x^2-25y^2\right):10xy$.

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=50$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 200 до 250 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

11. Два маляра могут выполнить работу по покраске стен помещения за 15 дней, а первый из них самостоятельно — за 20 дней. Сколько дней понадобится второму маляру, чтобы выполнить эту работу самостоятельно?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=12x-\ln(12x)+100$ на отрезке $\left[\frac{1}{36};\frac{3}{4}\right]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что рёбра $AB = 24$, $BC = 7$, $BB_1 = 4$.

а) Докажите, что расстояние от точек B и D до плоскости ACD_1 одинаковы.

б) Найдите это расстояние.

15. Решите неравенство $\log_3 \frac{3}{x^2} + \frac{4}{1+\log_3 9x} \geqslant 0$.

16. Из вершин A и B тупоугольного треугольника ABC проведены высоты BQ и AH. Известно, что $\angle B$ — тупой, $BH : BC = 1 : 3$, $BH = BQ$.

а) Докажите, что диаметр описанной вокруг $\triangle ABQ$ окружности в $\sqrt{3}$ раз больше BQ.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AHBQ$, если площадь треугольника HQC равна 16.

17. 20 марта Степан взял в банке кредит. В таблице представлен график его погашения.

Дата	20.03	20.04	20.05	20.06	20.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	80%	60%	40%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, текущий долг увеличивается на 3 %, а выплаты по кредиту Степан проводит по графику с 1 по 20 число каждого месяца, начиная с апреля. На сколько процентов больше суммы кредита выплатит Степан?

18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x-y+1) = 0, \\ a(x^2+y^2-10y+25)^2-(2a^2+a+5)(x^2+y^2-10y+25)+10a+5=0 \end{cases}$$

имеет не более одного решения.

19. Психологи разработали тест, пройдя который каждый человек получает оценку — положительное целое однозначное число Q — показатель его умственных способностей (чем больше таковых, тем выше Q). За рейтинг группы принимается среднее арифметическое значений показателей всех людей, входящих в эту группу.

а) Несколько человек группы А перешли в группу Б. Мог ли при этом у обеих групп вырасти рейтинг, если в группах было первоначально по 3 человека?

б) Несколько человек группы А перешли в группу Б. После этого несколько человек из группы Б (в числе которых могут быть и бывшие люди из А) перешло в группу А. Возможно ли, чтобы рейтинги обеих групп выросли и в первый, и во второй раз, если в группах было первоначально по 10 человек?

в) Несколько человек группы А перешли в группу Б. На какую наибольшую величину мог увеличиться рейтинг группы А, если рейтинг группы Б тоже увеличился и в каждой группе было первоначально по 10 человек?

Вариант № 22

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Поезд Владивосток — Хабаровск отправляется в 18:15, а прибывает в 8:15 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2. На диаграмме (см. рис. 92) показано распределение продаж шариковых ручек в 10 магазинах канцелярских товаров за 2014 год. Среди представленных магазинов первое место по продажам шариковых ручек занимал магазин «Всё для школы», десятое — «Знайка и К°». Какое место занимал магазин «Письмо»?

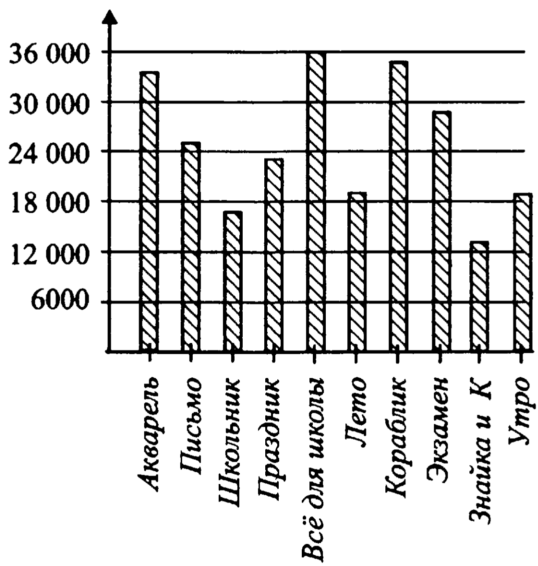


Рис. 92

3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размерами клетки 1 см×1 см (см. рис. 93). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

4. В некоторой стране из 30 000 появившихся на свет младенцев 16 800 мальчики. Найдите частоту рождения девочек в этом городе.

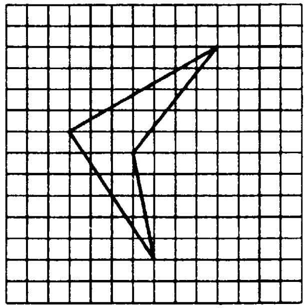


Рис. 93

5. Найдите корень уравнения $\log_{25}(x^2 + 6x) = \log_{25}(x^2 + 126)$.

6. Стороны параллелограмма равны 8 и 16. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10 (см. рис. 94). Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

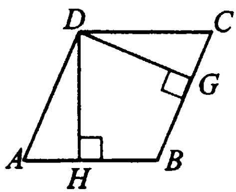


Рис. 94

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону
$x(t) = t^2 - 9t + 12$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с.

8. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 7 (см. рис. 95). Боковое ребро призмы равняется $\frac{12}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около данной призмы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left((9x - 8y)^2 - (9x + 8y)^2\right) : 12xy$.

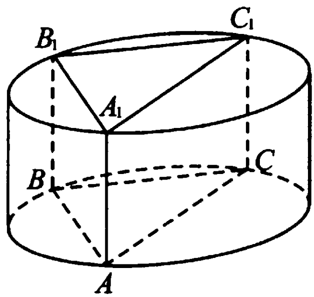


Рис. 95

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 80$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 70 до 120 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 300 до 400 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

11. Два маляра могут выполнить работу по покраске стен помещения за 8 дней, а второй из них самостоятельно — за 12 дней. Сколько дней понадобится первому маляру, чтобы выполнить эту работу самостоятельно?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(18x) - 18x + 29$ на отрезке $\left[\frac{1}{25}; \frac{2}{3}\right]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right)$.

14. В четырёхугольной правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AD = DC = 60$, $BB_1 = 11$.

а) Докажите, что расстояние от точек B_1 и D_1 до плоскости A_1BC_1 одинаковы.

б) Найдите это расстояние.

15. Решите неравенство $\log_5 125x^2 - \dfrac{3}{1 + \log_5 \dfrac{5}{x}} \leqslant 0$.

16. В $\triangle ABC$ биссектриса AE делит сторону BC на отрезки BE и EC, которые относятся как $2 : 3$ соответственно. Из точек B и E проведены параллельные прямые, которые пересекают сторону AC в точках D и F соответственно, причём $AD : DF : FC = 1 : 2 : 3$.

а) Докажите, что AB в 4 раза больше AD.

б) Найдите площадь четырёхугольника $DBEF$, если O — точка пересечения BD и AE и площадь треугольника BAO равна 35.

17. Лидия положила некоторую сумму на счёт в банке на полгода. По этому вкладу установлен «плавающий» процент, то есть число начисленных процентов зависит от числа полных месяцев нахождения вклада на счёте.

В таблице представлены условия начисления процентов.

Срок вклада	1 – 2 месяца	3 – 4 месяца	5 – 6 месяцев
Ставка в % годовых	6%	18%	12%

На сколько процентов сумма на счёте Лидии при таких условиях больше суммы, положенной Лидией на счёт, если каждый месяц, за исключением последнего, после начисления процентов банком она добавляет на счёт такую сумму, чтобы за месяц вклад увеличился на 10 % от первоначального вклада?

18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7(x + y + 7) = 1, \\ a(x^2 + y^2 - 4x + 4)^2 + (6a^2 - 3a - 2)(x^2 + y^2 - 4x + 4) - 12a + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее трёх решений.

19. Психологи фирмы разработали тест, пройдя который каждый человек получает оценку — положительное целое однозначное число Q — показатель его умственных способностей (чем больше таковых, тем выше Q).

За рейтинг отдела принимается среднее арифметическое значений показателей всех сотрудников, входящих в этот отдел.

а) Часть сотрудников отдела А перешла в отдел Б. Может ли при этом в двух отделах снизиться рейтинг, если в отделах было первоначально по 4 сотрудника?

б) Часть сотрудников отдела А перешла в отдел Б. После этого несколько сотрудников из отдела Б (в числе которых могут быть и бывшие сотрудники из А) перешли в отдел А. Возможно ли, что рейтинги обоих отделов снизились и в первый, и во второй раз, если в отделах было первоначально по 5 сотрудников?

в) Часть сотрудников отдела А перешла в отдел Б. На какую наибольшую величину мог уменьшиться рейтинг отдела A, если рейтинг второго отдела тоже уменьшился и в каждом отделе было первоначально по 10 сотрудников?

Вариант № 23

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 42 км в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

2. На рисунке 96 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 11 по 23 сентября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавших в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько миллиметров осадков выпало 17 сентября.

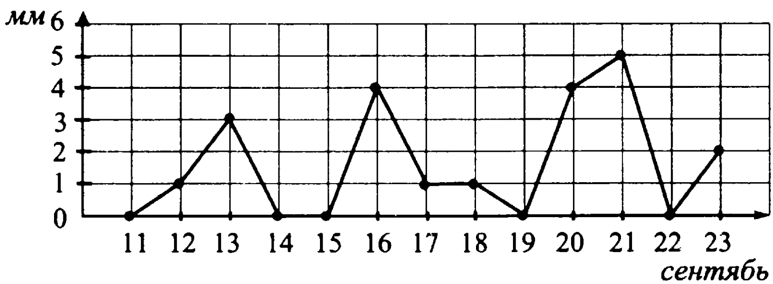


Рис. 96

3. Прямая a проходит через точки с координатами $(0; 7)$ и $(9; 0)$ (см. рис. 97). Прямая b проходит через точку с координатами $(0; 28)$ и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

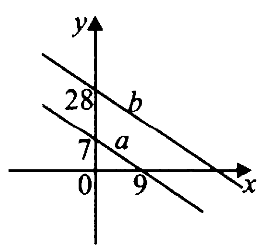


Рис. 97

4. За круглый стол на 11 стульев в случайном порядке рассаживаются 9 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{0{,}4 - 1{,}8x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

6. В треугольнике ABC ($\angle C = 90°$), $AC = 9\sqrt{3}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите AB.

7. На рисунке 98 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

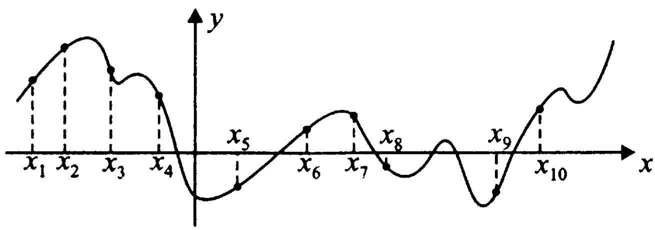


Рис. 98

8. Найдите расстояние между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 99. Все двугранные углы многогранника прямые.

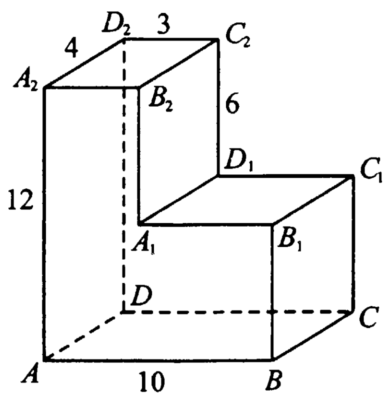


Рис. 99

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{9(m^7)^8 + 7(m^2)^{28}}{5\cdot(2m^{14})^4}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 240$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 15 мг?

11. Поезд, двигаясь со скоростью 70 км/ч, проезжает мимо платформы за 45 секунд. Определите длину платформы (в метрах), если длина поезда 600 м.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{3}{5}x^5+8x^3-27x$ на отрезке $[-5; 1]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(x + 4\pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что рёбра $DC = 15$, $AD = 8$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что расстояние от точек B и D до плоскости ACD_1 одинаковы.

б) Найдите это расстояние.

15. $\log^2_{0,5} \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{12 + 32\log_{0,5} x}{\log_{0,5} 8x} \geqslant 0$.

16. Из вершин A и B тупоугольного треугольника ABC проведены высоты BR и AH. Известно, что $\angle B$ — тупой, $BC : CH = 4 : 5$, $BH = BR$.

а) Докажите, что диаметр описанной вокруг $\triangle ABR$ окружности в $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ раз больше BR.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AHBR$, если площадь треугольника HRC равна 75.

17. 10 марта Сергей взял в банке кредит. В таблице представлен график его погашения.

Дата	10.03	10.04	10.05	10.06	10.07	10.08
Долг (в процентах от кредита)	100%	80%	60%	30%	10%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, текущий долг увеличивается на 4 %, а выплаты по кредиту Сергей проводит по графику с 1 по 10 число каждого месяца, начиная с апреля. На сколько процентов больше суммы кредита выплатит Сергей?

18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 6^{8x+y+2} = 36, \\ 3a(2x^2 + y^2 - 33x)^2 - (a+3)(2x^2 - 33x + y^2) - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

19. Психологи разработали тест, пройдя который каждый человек получает оценку — положительное целое однозначное число Q — показатель его умственных способностей (чем больше таковых, тем выше Q). За рейтинг отдела принимается среднее арифметическое значений показателей всех людей, входящих в этот отдел.

а) Один из сотрудников отдела A перешёл в отдел B. Мог ли при этом у обоих отделов вырасти рейтинг, если в отделах было первоначально по 3 человека?

б) Отделы A и B объединили. Возможно ли, что рейтинг получившегося отдела стал меньше рейтингов как отдела A, так и отдела B, если изначально в отделах было по три человека?

в) Отделы A и B объединили. Какая наибольшая разница может быть между начальным рейтингом отдела A и рейтингом получившегося отдела, если рейтинг отдела A не превышал рейтинга отдела B и в отделах A и B было по 3 человека?

Вариант № 24

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Герман Борисович купил автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 36 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

2. На рисунке 100 точками показана среднесуточная температура в городе Веченск ежедневно с 4 по 17 сентября 1623 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией. Определите, какая была температура 11 сентября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

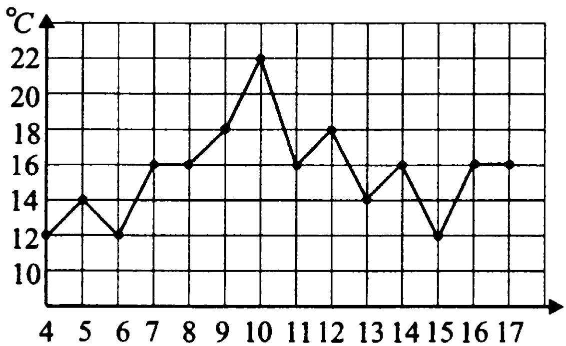


Рис. 100

3. Прямая a проходит через точки с координатами $(0;12)$ и $(-9;0)$ (см. рис. 101). Прямая b проходит через точку с координатами $(0;-8)$ и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

4. За круглый стол на 26 стульев в случайном порядке рассаживаются 24 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{23}{4}x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

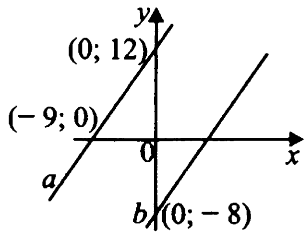


Рис. 101

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC = 5\sqrt{3}$, $\cos A = 0{,}5$. Найдите AB.

7. На рисунке 102 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

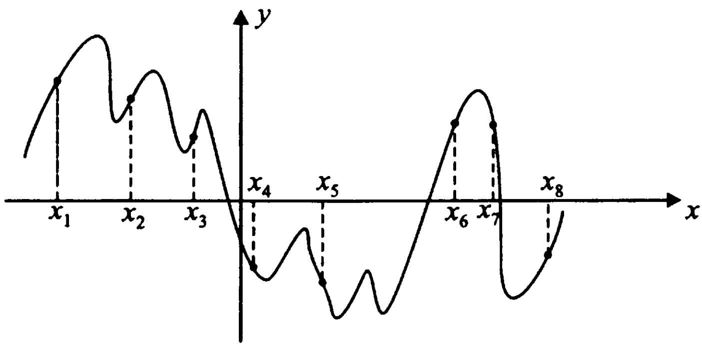


Рис. 102

8. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 103. Все двугранные углы многогранника прямые.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{15(k^4)^{12} + 13(k^{24})^2}{(2k^{16})^3}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 150$ мг. Период его

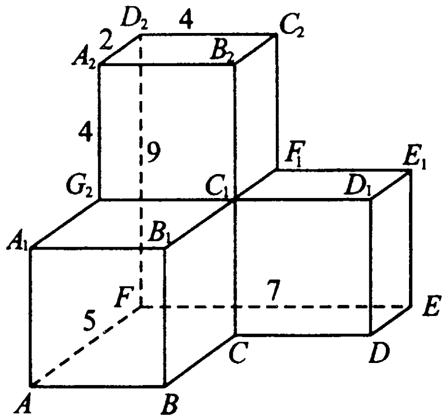


Рис. 103

полураспада $T = 3$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 18,75 мг?

11. Поезд, двигаясь со скоростью 40 км/ч, проезжает мимо платформы за 4 минуты 12 секунд. Определите длину платформы (в метрах), если длина поезда 1600 м.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 320x$ на отрезке $[-2; 5]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(\dfrac{7\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

14. В четырёхугольной правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = BC = 48$, $BB_1 = 14$.

а) Докажите, что расстояние от точек B_1 и D_1 до плоскости A_1DC_1 одинаковы.

б) Найдите это расстояние.

15. $\log_{0,2}^2(5x^2) + \dfrac{2\log_{0,2}^2 x - 9\log_{0,2} x + 2}{\log_{0,2}(25x)} \leqslant 0.$

16. В $\triangle ABC$ биссектриса AM делит сторону BC на отрезки BM и MC, которые относятся как $2 : 7$ соответственно. Из точек B и M проведены параллельные прямые, которые пересекают сторону AC в точках D и F соответственно, причём $AD : FC = 3 : 14$.

а) Докажите, что AB в 2 раза больше AD.

б) Найдите площадь четырёхугольника $DBMF$, если O — точка пересечения BD и AM и площадь треугольника BAO равна 27.

17. Оксана положила некоторую сумму на счёт в банке на полгода. По этому вкладу установлен «плавающий» процент, то есть число начисленных процентов зависит от числа полных месяцев нахождения вклада на счёте.

В таблице представлены условия начисления процентов.

Срок вклада	1 – 2 месяца	3 – 4 месяца	5 – 6 месяцев
Ставка в % годовых	12%	15%	18%

На сколько процентов сумма на счёте Оксаны при таких условиях больше суммы, положенной Оксаной на счёт, если каждый месяц, за исключением последнего, после начисления процентов банком она добавляет на счёт такую сумму, чтобы за месяц вклад увеличился на 5% по сравнению с первоначальным вкладом?

18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4 - 2x + y} = 2, \\ a(x^2 + 3y + 1)^2 - (a + 1)(x^2 + 3y + 1) - 2a - 1 = 0 \end{cases}$$

не более 3 решений.

19. Психологи фирмы разработали тест, пройдя который, каждый человек получает оценку — положительное целое однозначное число Q — показатель его умственных способностей (чем больше таковых, тем выше Q). За рейтинг отдела принимается среднее арифметическое значений показателей всех сотрудников, входящих в этот отдел.

а) Один из сотрудников отдела A перешёл в отдел B. Может ли при этом в двух отделах снизиться рейтинг, если в отделах было первоначально по 4 сотрудника?

б) Отделы A и B объединили. Возможно ли, что рейтинг получившегося отдела стал больше рейтингов как отдела A, так и отдела B, если в отделах было по 4 человека?

в) Отделы A и B объединили. Какая наибольшая разница может быть между начальным рейтингом отдела A и рейтингом получившегося отдела, если рейтинг отдела A не превышал рейтинга отдела B и в отделах A и B было по 4 человека?

Вариант № 25

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 июня составляли 279 куб. м воды, а 1 июля — 287 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за июнь, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 24 руб. 40 коп.? Ответ дайте в рублях.

2. На рисунке 104 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 16 по 28 марта. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавших в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку количество дней рассматриваемого периода, когда выпадало 4 и более миллиметров осадков.

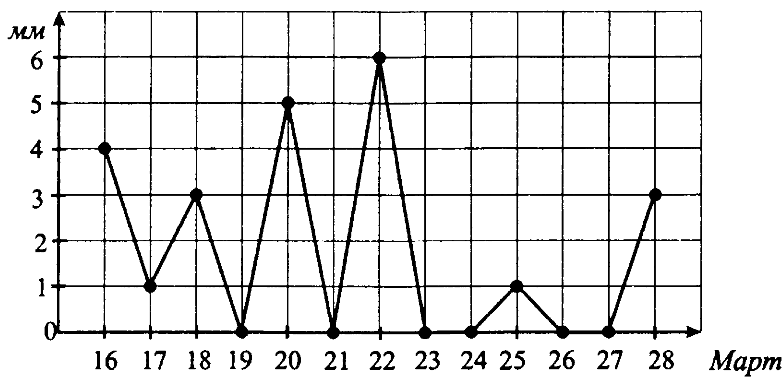


Рис. 104

3. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9π. Найдите площадь заштрихованной фигуры. В ответе запишите результат $\frac{S_{\text{фигуры}}}{\pi}$ (см. рис. 105).

4. На рисунке 106 изображён лабиринт. Лошадь заходит в лабиринт в точке «Вход». Разворачиваться и идти назад лошадь не хочет, поэтому на каждом разветвлении она выбирает один из путей, по которому ещё не

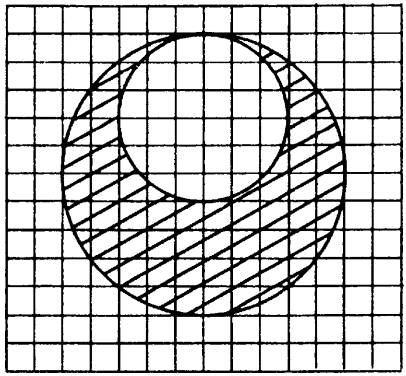


Рис. 105

шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью лошадь придёт к выходу В.

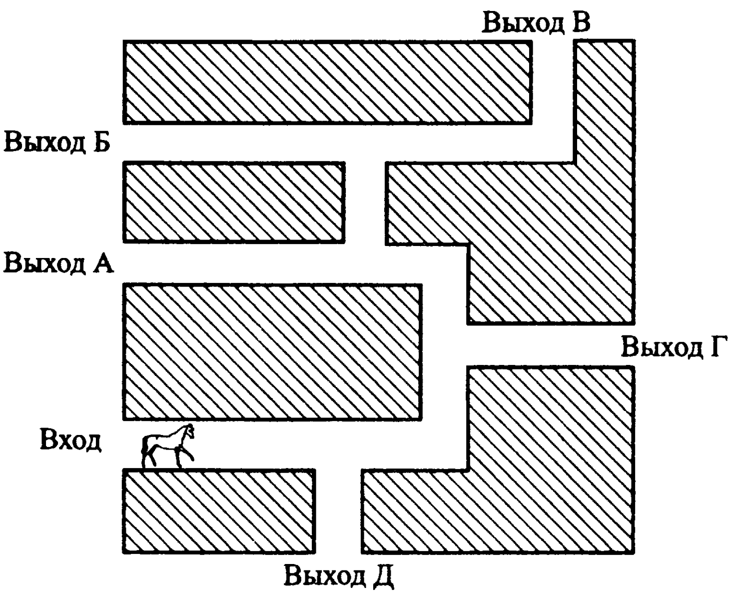


Рис. 106

5. Найдите корень уравнения $\dfrac{2x+4}{3x+17} = \dfrac{2x+4}{17x+3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 284 (см. рис. 107). Точка E — середина CD. Найдите площадь треугольника ADE.

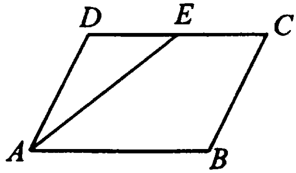


Рис. 107

7. На рисунке 108 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?

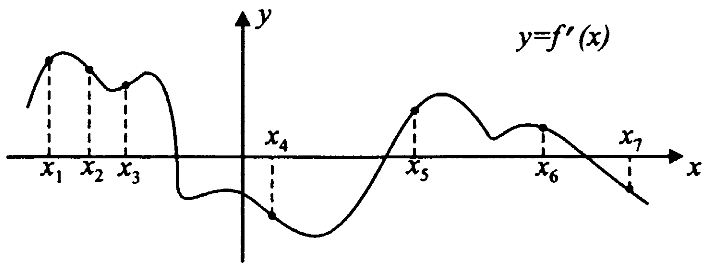


Рис. 108

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 96π. Радиус основания равен 8. Найдите высоту цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(\log_5 125) \cdot (\log_7 49)$.

10. В боковой стенке промышленного цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - kt\sqrt{2gH_0} + \frac{g}{2}k^2t^2$, где $H_0 = 45$ м — начальный уровень воды, t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $k = \dfrac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. К какому моменту времени высота столба воды в баке составит не более 20 м? Ответ приведите в секундах.

11. Ремонт одной и той же квартиры Виктор и Алексей делают за 8 дней, как и Андрей вместе с Виктором, при этом Алексей с Андреем могут выполнить этот ремонт за 12 дней. Сколько дней будет длиться ремонт, если все 3 мастера будут работать одновременно?

12. Найдите точку максимума функции $y = \log_2(4 + 10x - x^2) - 71$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $16 \cdot 5^{\cos x} - 6 \cdot 10^{\cos x} = 20^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что плоскости AD_1C и BB_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости AD_1C, если $AB = 5$, $AA_1 = 6$.

15. Решите неравенство $|2^x - 3| \geqslant 4 + \dfrac{1}{6 - |2^x - 3|}$.

16. В прямоугольном треугольнике ABC вневписанная окружность с центром O_a и радиусом r_a касается катета BC в точке T_a, вневписанная окружность с центром O_b и радиусом r_b касается катета AC в точке T_b.

а) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника ABC может быть найдена по формуле $S = r_a r_b$.

б) Найдите площадь четырёхугольника AT_bT_aB, если $S_{ABC} = 30$.

17. Банк планирует на один год вложить 20 % имеющихся у него средств клиентов в проект A, а остальные 80 % — в проект B. В зависимости от обстоятельств проект A может принести прибыль в размере от 27 % до 32 % годовых, а проект B — от 37 % до 42 % годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться от 15 % до 20 % годовых. Определите, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты A и B может при этом получить банк.

18. При каких значениях параметра a неравенство $\log_5(4 + a + (1 + 5a^2 - \cos^2 x)\sin x - a\cos 2x) \leqslant 1$ выполняется при всех значениях x?

19. Можно ли расставить n последовательных натуральных чисел от 1 до n в таком порядке, чтобы среднее арифметическое любой группы из двух или более подряд идущих чисел не было целым:

а) при $n = 7$;
б) при $n = 2k + 1$;
в) при $n = 6$;
г) при $n = 2k$?

Вариант № 26

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 августа составляли 14 341 киловатт-час, а 1 сентября — 14 555 киловатт-часов. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за август, если 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 40 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На рисунке 109 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 6 по 24 сентября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавших в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку количество дней в период с 8 по 20 сентября, когда выпадало не более 3 миллиметров осадков.

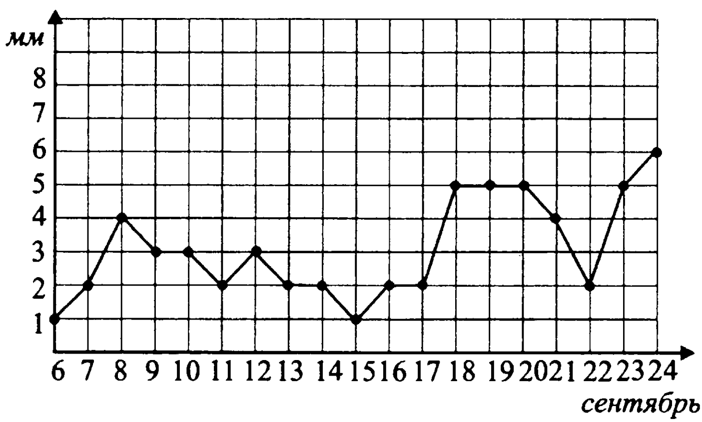


Рис. 109

3. Найдите (в см^2) площадь S кольца, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$1 см (см. рис. 110). В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

4. На рисунке 111 изображён лабиринт. Крыса заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад крыса не может, поэтому на каждом разветвлении крыса выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью крыса придёт к выходу А.

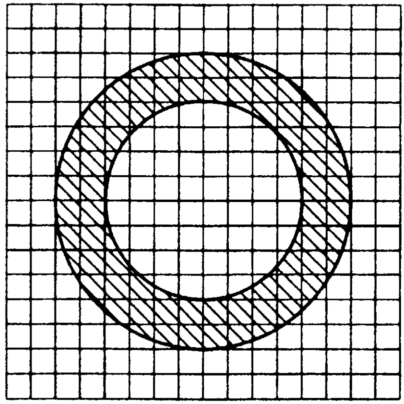


Рис. 110

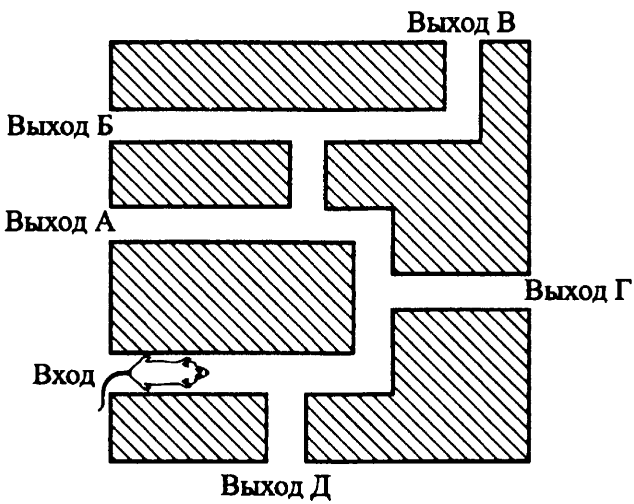


Рис. 111

5. Найдите корень уравнения $\dfrac{3x+12}{9x-14}=\dfrac{3x+12}{12x-23}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 442 (см. рис. 112). Точка E — середина CD. Найдите площадь четырёхугольника $ABCE$.

7. На рисунке 113 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?

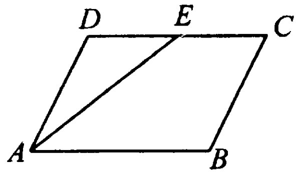


Рис. 112

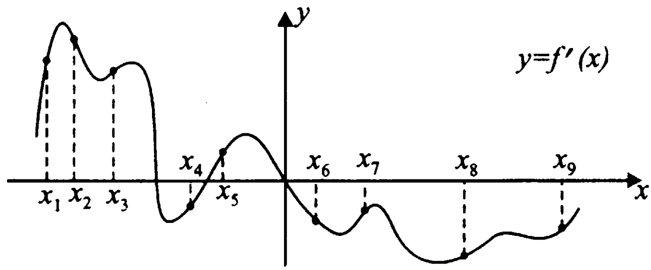


Рис. 113

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а высота цилиндра равна 5. Найдите радиус основания цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(\log_3 81) \cdot (\log_2 64)$.

10. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - kt\sqrt{2gH_0} + \frac{g}{2}k^2t^2$, где $H_0 = 5$ м — начальный уровень воды, t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. К какому моменту времени высота столба воды в баке составит не более 4,05 м? Ответ приведите в секундах.

11. Ремонт одной и той же квартиры Егор и Тимофей делают за 15 дней, Егор вместе с Никитой за 12 дней, при этом Тимофей с Никитой могут выполнить этот ремонт за 20 дней. Сколько дней будет длиться ремонт, если все 3 мастера будут работать одновременно?

12. Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 - 16x + 82) + 13$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3 \cdot 2^{\sin 2x} - 2 \cdot 6^{\sin 2x} - 18^{\sin 2x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{5}{2}\pi\right)$.

14. В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра AB, а точка N расположена на ребре SC так, что $SN : NC = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскости SMC и ANB перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка MN, если длина ребра AB равна 8.

15. Решите неравенство $|3^x - 5| - 3 \geqslant \frac{1}{5 - |3^x - 5|}$.

16. Пусть O_1 — центр вписанной окружности треугольника ABC, O_2 — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC.

а) Докажите, что $O_1M = MO_2$, где M — точка пересечения отрезка O_1O_2 и описанной окружности треугольника ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $BM = 5$.

17. Банк планирует на один год вложить 20 % имеющихся у него средств в проект A, 30 % средств — в проект B, а остальные 50 % — в проект C. В зависимости от обстоятельств проект A может принести от 25 % до 30 % годовых, проект B — от 35 % до 42 % годовых, а проект C — от 32 % до 48 % годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться в пределах от 14 % до 22 % годовых.

Определите, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты A, B и C может при этом получить банк.

18. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{2\cos x + 4a - \sin x \cdot \sin 2x - 4a\sin^2 x + 10a^2\cos x + 16} < 2\sqrt{6}$$

выполняется при всех значениях x?

19. Можно ли расставить n последовательных натуральных чисел от 1 до n в таком порядке, чтобы среднее арифметическое любой группы из двух или более подряд идущих чисел не было целым:

а) при $n = 5$;
б) при $n = 2k + 1$;
в) при $n = 8$;
г) при $n = 2k$?

Вариант № 27

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Тетрадь стоит 28 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 40 тетрадей, если при покупке больше 25 тетрадей магазин делает скидку 10 % от стоимости всей покупки?

2. На рисунке 114 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 14 по 26 ноября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавших в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней указанного периода не было осадков.

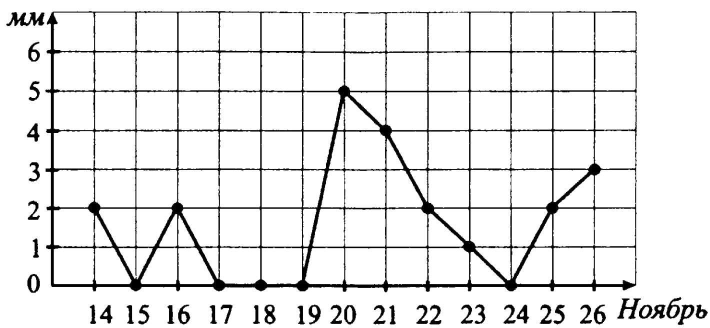


Рис. 114

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 115). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

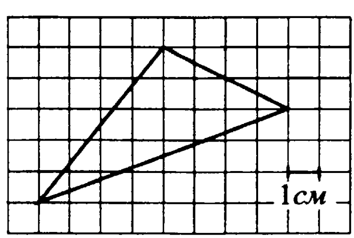


Рис. 115

4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $5^{\log_{25}(4x-19)} = 9$.

6. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 74° и 66° (см. рис. 116). Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

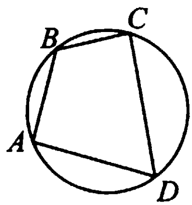


Рис. 116

7. На рисунке 117 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки с абсциссами $-4, -3, -2, -1, 1$. В какой из этих точек значение производной данной функции наибольшее? В ответе укажите абсциссу этой точки.

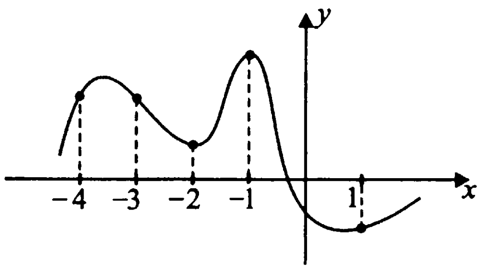


Рис. 117

8. Объём первого шара в 8 000 раз больше объёма второго (см. рис. 118). Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $25^{\log_5 8}$.

10. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 420$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке),

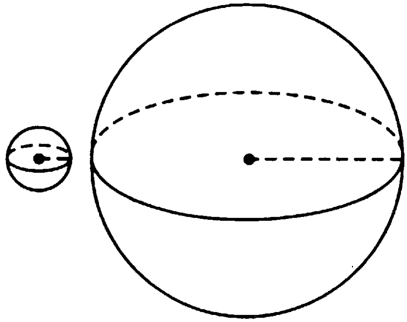


Рис. 118

под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 2520 нм?

11. Свежий плод инжира содержит 75 % воды, а сушёный — 2,5 %. Сколько килограммов свежих плодов потребуется для получения 20 кг сушёного инжира?

12. Найдите наибольшее значение функции
$y = 4x + 8\cos x - 4\sqrt{3} - 17 - \frac{2\pi}{3}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\log_2(3\sin 2x - 3\sin x - 2\cos x + 5) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14. На рёбрах AA_1, CC_1, C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $AM : AA_1 = C_1N : C_1C = C_1P : C_1D_1 = 2 : 3$.

а) Постройте точку H пересечения плоскости MNP с прямой BC.

б) Найдите отношение $BH : BC$.

15. Решите неравенство $|\log_2 x - 4| \geqslant 3 + \frac{1}{5 - |\log_2 x - 4|}$.

16. Дан треугольник ABC.

а) Докажите, что радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC, вычисляется по формуле $r_a = \dfrac{S}{p - BC}$, где S — площадь $\triangle ABC$, p — его полупериметр.

б) Найдите радиус вневписанной окружности, касающейся основания равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 25, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 12.

17. Алексей Леонидович имеет годовой валютный вклад под ставку d % годовых. Если вклад с причитающимися процентами не будет востребован на дату окончания, договор считается пролонгированным (продленным) ещё на один год. Годичная ставка по рублёвому депозиту (вкладу) составляет r %, курс доллара на дату начала возможной пролонгации — K_0, а прогнозируемый курс на дату её окончания — K_1. За перевод валютного вклада в рублёвый банк взимает комиссионные (в рублях) в размере α% переводимой суммы.

а) Исходя из данных, получите условие целесообразности перевода (на дату возможной пролонгации) валютного вклада S на годовой рублёвый депозит.

б) Определите, что выгоднее — продлить валютный вклад или переложить деньги на рублёвый вклад, при условии, что $K_0 = 63$; $K_1 = 64$, $d = 9$; $r = 12$; $\alpha = 0{,}7$.

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (2a+4)x + a^2 > -3 - 4a, \\ x^2 - (3a-1)x \leqslant -2a^2 - a + 6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

19. В натуральном числе каждая цифра, кроме первой и последней, больше среднего арифметического соседних с ней цифр.

а) Приведите пример такого четырёхзначного числа.

б) Приведите пример такого шестизначного числа.

в) Найдите наибольшее такое число.

Вариант № 28

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Булочка с маком стоит 16 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 20 булочек, если при покупке больше 10 булочек магазин делает скидку 15 % от стоимости всей покупки?

2. На рисунке 119 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 10 по 20 октября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавших в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней указанного периода не было осадков.

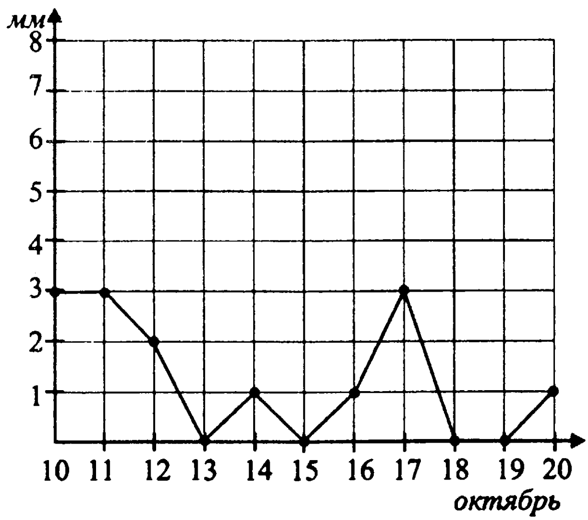


Рис. 119

3. Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 120).

4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $4^{\log_{16}(7x-6)} = 8$.

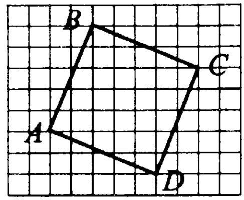


Рис. 120

6. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 95° и 56° (см. рис. 121). Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

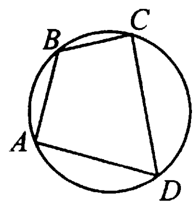


Рис. 121

7. На рисунке 122 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки с абсциссами -5, -4, -2, -1, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите абсциссу этой точки.

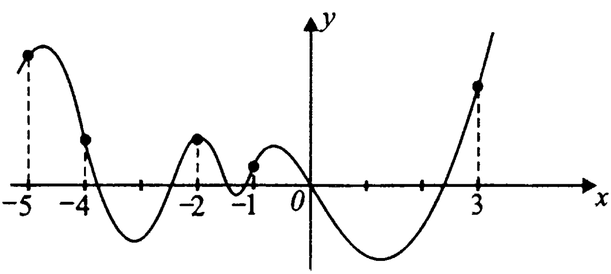


Рис. 122

8. Объём первого куба в 343 раза больше объёма второго (см. рис. 123). Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго?

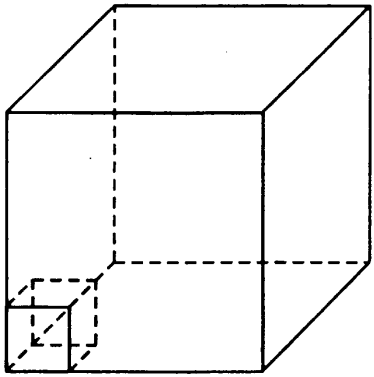


Рис. 123

Часть 2

9. Найдите значение выражения $49^{\log_7 2}$.

10. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 441$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 2 646 нм?

11. Свежий плод инжира содержит 70 % воды, а сушёный плод инжира — 3,4 %. Сколько килограммов инжира потребуется для получения 10 кг сушёного инжира?

12. Найдите наименьшее значение функции

$y = 5\sqrt{3}x + 10\cos x - \dfrac{10\sqrt{3}\pi}{3} + 14$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\log_2(4\sin 2x + 4\cos x - 2\sin x + 7) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{3}{2}\pi; 3\pi\right]$.

14. На рёбрах AA_1, CC_1, C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $A_1M : MA = D_1P : PC_1 = CN : NC_1 = 1 : 3$.

а) Постройте точку K пересечения плоскости MNP с прямой AB.

б) Найдите отношение $AK : KB$.

15. Решите неравенство $|\log_2 x + 1| - \dfrac{1}{|\log_2 x + 1| - 2} \geqslant 2$.

16. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. O — центр вписанной окружности, T — точка касания вневписанной окружности катета BC, M — точка пересечения прямой TO и другого катета AC.

а) Докажите, что $AM = MC$.

б) Найдите площадь треугольника TMC, если $AC = 4$, $BC = 3$.

17. Некто хочет открыть вклад в банке на определённую сумму сроком на 18 месяцев. Банк предлагает сделать валютный вклад в долларах под 4 % годовых или рублёвый вклад под 17 % годовых.

Какому условию должен удовлетворять прогнозируемый через 18 месяцев курс рубля к доллару K_1, чтобы более выгодным был рублёвый вклад, если на момент вклада курс составляет $K_0 = 60$ рублей за один доллар?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (3a-2)x + a^2 \geqslant 3a - 5, \\ x^2 - (3a-1)x + 2a^2 \leqslant 3a + 2; \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

19. В натуральном числе каждая цифра, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического соседних с ней цифр.

а) Приведите пример такого четырёхзначного числа.

б) Приведите пример такого шестизначного числа.

в) Найдите наибольшее такое число.

Вариант № 29

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Килограмм малины стоит 120 рублей. Маша купила 2 кг 400 г малины. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 500 рублей?

2. На диаграмме 124 показана среднесуточная температура воздуха в городе Ростове-на-Дону с 15 по 27 ноября 2010 года. По горизонтали указываются даты, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднесуточную температуру в Ростове-на-Дону в период с 21 по 27 ноября 2010 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.

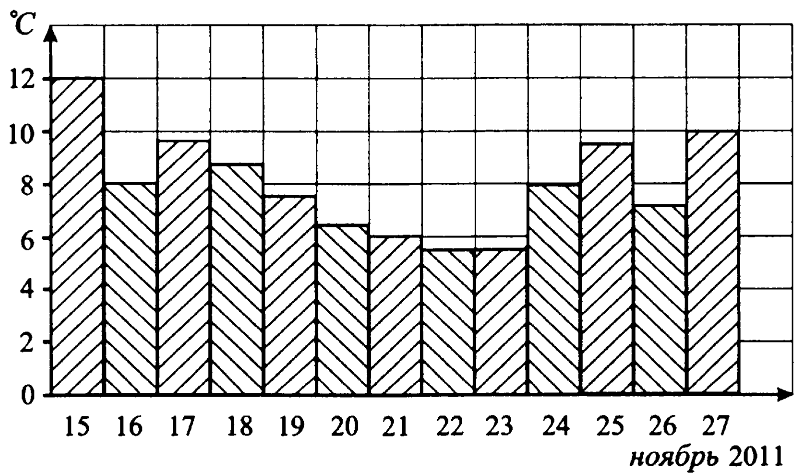


Рис. 124

3. Точки $O(0;0)$, $B(15;4)$, $C(0;18)$ и A являются вершинами параллелограмма (см. рис. 125). Найдите ординату точки A.

4. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мороз» будет по очереди играть с командами «Метель», «Снегопад» и «Гололёд». Найдите вероятность того, что «Мороз» будет начинать только первую и последнюю игры.

5. Найдите корень уравнения $\log_6(5x+27) = \log_6(3+x)+1$.

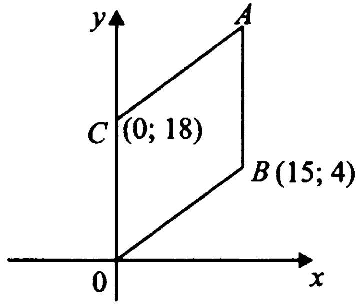


Рис. 125

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BH = 7$, $\sin A = \frac{1}{3}$. Найдите AB.

7. На рисунке 126 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(9) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

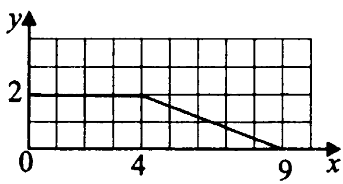


Рис. 126

8. Площадь поверхности тетраэдра равна 46 (см. рис. 127). Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_7 84 - \log_7 12$.

10. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 30$ В, частота $\omega = 80°/\text{с}$, фаза $\varphi = 30°$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нём не ниже чем 15 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

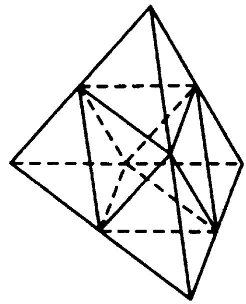


Рис. 127

11. Грузовой автомобиль перевозит технику из одного города в другой, каждый день проезжая на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый день грузовой автомобиль прошёл 520 км. Определите, сколько километров проехал грузовой автомобиль за третий день, если весь путь он проделал за 5 дней и расстояние между городами составляет 3270 км.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x - 7)^2(x + 8) + 29$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x + \sin 2x = 1$;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что угол между прямыми BE_1 и ED_1 прямой.

б) Найдите угол между плоскостями ABD_1 и BB_1E.

15. Решите неравенство $\dfrac{4^x + \log_2 x - 12}{\log_2 x - 2^x} \geqslant 1$.

16. В каждый угол равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = 10$, $AC = BC = 13$, вписана окружность единичного радиуса, точки O_1, O_2 и O_3 центры этих окружностей. Найдите:

а) радиус окружности вписанной в треугольник ABC;

б) площадь треугольника $O_1O_2O_3$.

17. На поверхности компьютерной мышки в интернет-кафе живёт колония из 30 000 бактерий, которые размножаются простым делением, то есть каждый час их число удваивается. Для борьбы с бактериями производится ежечасная дезинфекция, во время которой погибает ровно n бактерий. Число бактерий удваивается непосредственно перед дезинфекцией. Найдите число n, если известно, что все бактерии на мышке уничтожены за четыре дезинфекции.

18. Найти все значения a, при каждом из которых система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2, \\ y = |x - 1| + a \end{cases}$$

19. Страницы тетради пронумерованы на полиграфической фабрике числами от 1 до 96. Мальчик на случайной странице записывает 0 и нумерует далее страницы тетради числами 1, 2, 3 ... до конца тетради без пропусков, возвращается к странице с 0 и, листая страницы тетради назад, записывает числа −1, −2, −3,... до начала тетради без пропусков. Сумма чисел, которые записал мальчик на страницах этой тетради, равна S. На какой странице по фабричной нумерации мальчик записал число 0, если а) $S = 48$; б) $S = 4\,560$; в) $S = 1\,968$.

Вариант № 30

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. На бензоколонке один литр бензина стоит 34 руб. 80 коп. Водитель залил в бак 40 литров бензина и взял бутылку воды за 68 рублей. Сколько рублей сдачи он получит с 2000 рублей?

2. На диаграмме (см. рис. 128) показана среднесуточная температура воздуха в городе N с 12 по 25 декабря 2013 года. По горизонтали указываются даты, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднесуточную температуру в N в период с 14 по 21 декабря включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.

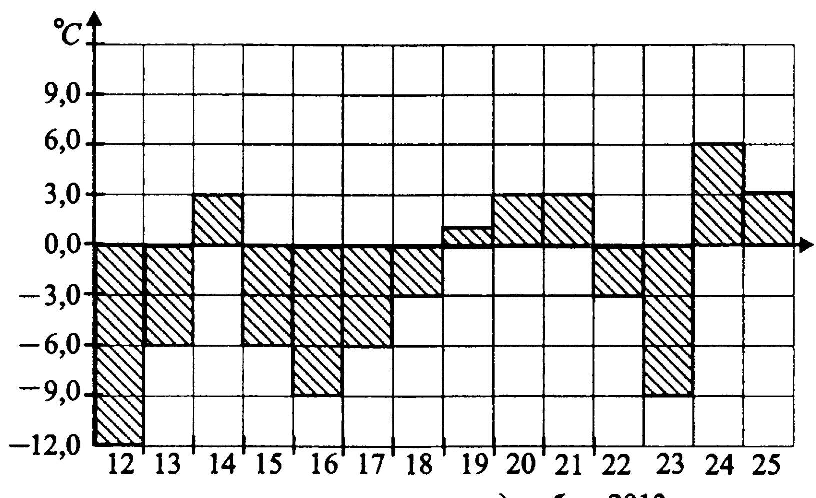


Рис. 128

3. Точки $O(0;0)$, $A(30;50)$, $B(30;12)$ и C являются вершинами параллелограмма (см. рис. 129). Найдите ординату точки C.

4. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Самолёт» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Самолёт» выиграет жребий ровно два раза.

5. Найдите корень уравнения $\log_8(38-37x) = \log_8(4-5x)+1$.

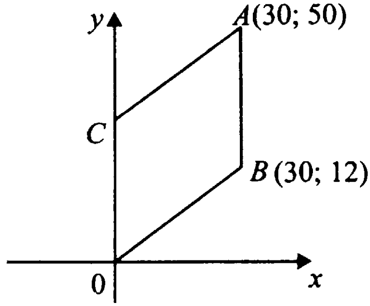


Рис. 129

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 7$, $\cos A = \frac{1}{3}$. Найдите AB.

7. На рисунке 130 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(1)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

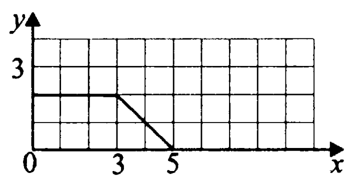


Рис. 130

8. Площадь поверхности тетраэдра равна 862 (см. рис. 131). Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_5 12{,}5 + \log_5 10$.

10. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 10$ В, частота $\omega = 100°/\text{с}$, фаза $\varphi = 0°$. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже, чем 5 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

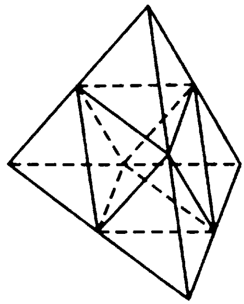


Рис. 131

11. Ксюша решила прочесть книгу объёмом 672 страницы. Ежедневно она читает на одно и то же количество страниц больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что в первый день она прочла 12 страниц. Определите, сколько страниц она прочла в последний день, если всего на чтение этой книги девочка потратила 16 дней.

12. Найдите точку минимума функции $y = (x+4)^2(x-11) - 76$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos^2 x + \cos 2x = 1$;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что угол между прямыми BE и A_1D_1 равен $60°$.

б) Найдите угол между плоскостями A_1BE и A_1BD_1.

15. Решите неравенство $\dfrac{9^x + \log_3 x - 20}{\log_3 x - 3^x} \geqslant 1$.

16. В каждый угол равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = 12$, $AC = BC = 10$, вписана окружность радиусом r, точки O_1, O_2 и O_3 центры этих окружностей. Найдите:

а) радиус окружности вписанной в треугольник ABC;

б) радиус r, если площадь треугольника $O_1O_2O_3$ равна трети площади треугольника ABC.

17. В пчелином улье после зимовки сохранилось некоторое количество пчёл. Готовясь к летнему медосбору, пчелиная семья ежемесячно увеличивалась на 60 %, но из-за различных неблагоприятных факторов рой ежемесячно терял 1 000 пчел. Несмотря на это, через четыре месяца количество пчёл в улье составляло 56 280. Сколько пчёл было в улье после зимовки? Для определённости добавим, что ежемесячно сначала происходит увеличение пчелиной семьи на 60 %, а затем потеря 1 000 пчёл, а не наоборот.

18. Найти все значения a, при каждом из которых система имеет единственное решение: $\begin{cases} (|x|-10)^2+(y-5)^2=10, \\ y=a|x-4|-3. \end{cases}$

19. Страницы тетради пронумерованы на полиграфической фабрике числами от 1 до 48. Девочка на случайной странице записывает 0 и нумерует далее страницы тетради числами 1, 2, 3, ...до конца тетради без пропусков, возвращается к странице с 0 и, листая страницы тетради назад, записывает числа -1, -2, -3,...до начала тетради без пропусков. Сумма чисел, которые записала девочка на страницах этой тетради, равна S. На какой странице по фабричной нумерации девочка записала число 0, если а) $S=24$; б) $S=1128$; в) $S=888$.

Вариант № 31

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Стоимость проездного билета на месяц составляет 580 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 26 рублей. Никита купил проездной и совершил за месяц 39 поездок. На сколько рублей больше он бы потратил, если бы покупал билеты на одну поездку?

2. На графике (см. рис. 132) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближённо выражается формулой $v = 0{,}045n$, где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не менее 80 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

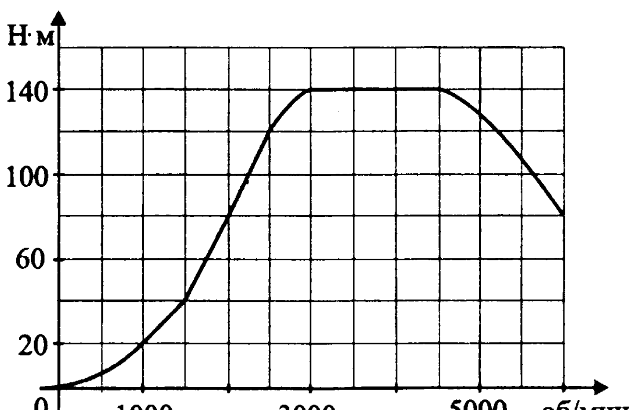


Рис. 132

3. Найдите тангенс угла BKA (см. рис. 133).

4. В некоторой типографии 10 % отпечатанных справочников имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 60 % дефектных справочников. Остальные справочники поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранный при покупке справочник имеет дефект. Ответ округлите до тысячных.

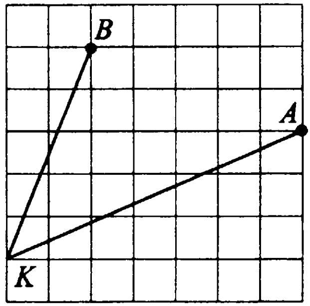


Рис. 133

5. Найдите корень уравнения $3^{10-3x} = 0{,}75 \cdot 4^{10-3x}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 53 и 75. Боковые стороны равны 22. Найдите косинус острого угла трапеции.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

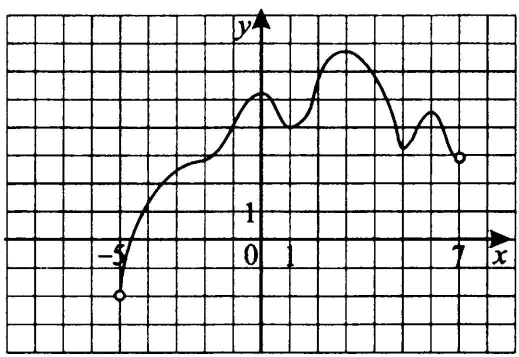


Рис. 134

8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5 (см. рис. 135). Найдите объём параллелепипеда.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $8(p(3x) - 3p(x+2))$, если $p(x) = x + 8$.

10. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах)

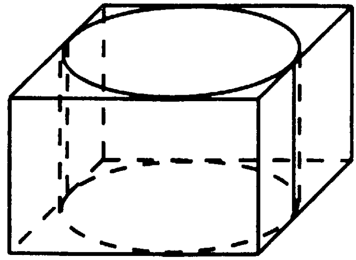


Рис. 135

время полёта будет не меньше 7 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 35$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

11. Компания «Звезда» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2009 году, имея капитал в размере 480 000 рублей. Каждый год, начиная с 2010 года, она получала прибыль, которая составляла 150 % от капитала предыдущего года. А компания «Планета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2011 году, имея капитал в размере 720 000 рублей, и, начиная с 2012 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 300 % от капитала предудущего года. На сколько рублей капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2014 года, если прибыль из оборота не изымалась?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 2)^2(x - 10) + 156$ на отрезке $[-1;\ 20]$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos^2 x + \sin 2x = 1$;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 4.

а) Докажите, что угол между прямыми AD_1 и DC_1 равен 90°;

б) Найдите угол между плоскостями FAC_1 и AA_1D.

15. Решите неравенство $\dfrac{3^x + \log_3^2 x - 6}{\log_3 x - 3^x} \geqslant -1.$

16. В каждый угол равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = 16$, $AC = BC = 17$, вписана окружность единичного радиуса, точки O_1, O_2 и O_3 центры этих окружностей. Найдите:

а) радиус окружности вписанной в треугольник ABC ;

б) площадь треугольника $O_1O_2O_3$.

17. На поверхности компьютерной мышки в интернет-кафе живёт колония из 62 000 бактерий, которые размножаются простым делением, то есть каждый час их число удваивается. Для борьбы с бактериями производится ежечасная дезинфекция, во время которой погибает ровно n бактерий. Число бактерий удваивается непосредственно перед дезинфекцией. Найдите число n, если известно, что все бактерии на мышке уничтожены за пять дезинфекций.

18. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (|x| - 10)^2 + (y - 6)^2 = 10, \\ (x + 4)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

19. Страницы тетради пронумерованы на полиграфической фабрике числами от 1 до 84. Мальчик на случайной странице записывает 0 и нумерует далее страницы тетради числами 1, 2, 3 ...до конца тетради без пропусков, возвращается к странице с 0 и, листая страницы тетради назад, записывает числа -1, -2, -3,...до начала тетради без пропусков. Сумма чисел, которые записал мальчик на страницах этой тетради, равна S. На какой странице по фабричной нумерации мальчик записал число 0, если а) $S = 42$; б) $S = 3\,486$; в) $S = 1\,890$.

Вариант № 32

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 430 рублей, а стоимость одного номера журнала — 32 рубля. За полгода Аня купила 18 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2. На графике (см. рис. 136) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближённо выражается формулой $v = 0{,}045n$, где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не менее 150 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

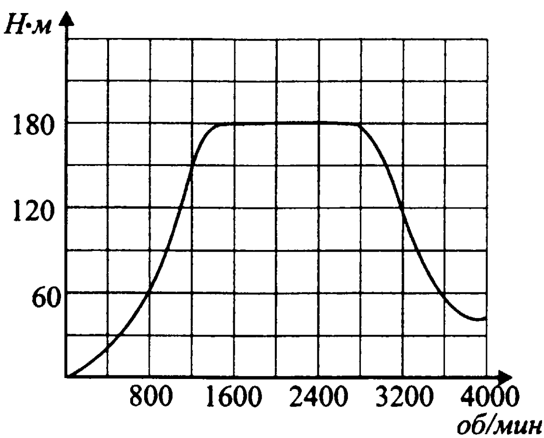


Рис. 136

3. Найдите тангенс угла KST (см. рис. 137).

4. На фабрике керамической посуды 15 % произведённых кружек имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных кружек. Остальные кружки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке кружка не имеет дефектов. Ответ округлите до тысячных.

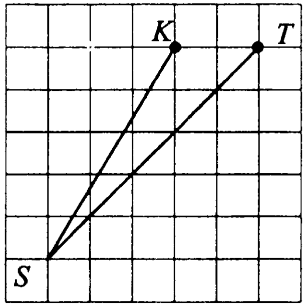


Рис. 137

5. Найдите корень уравнения $3^{4+5x} = 0,09 \cdot 10^{4+5x}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 55 и 85. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{5}{8}$. Найдите боковую сторону.

7. На рисунке 138 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

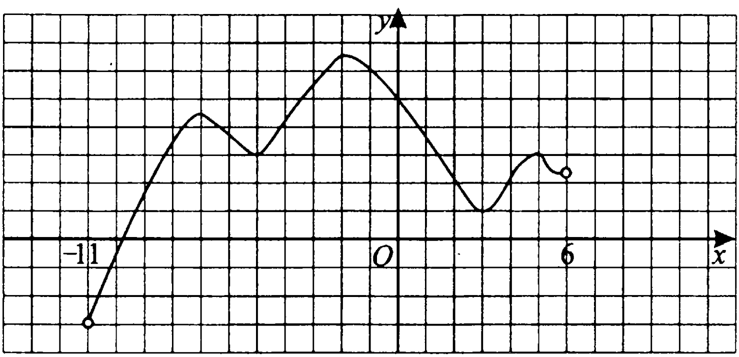


Рис. 138

8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 139), радиус основания которого равен 5. Объём параллелепипеда равен 400. Найдите высоту цилиндра.

Часть 2

9. Найдите $p(x+2) + p(9-x)$, если $p(x) = 3x - 7$.

10. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле

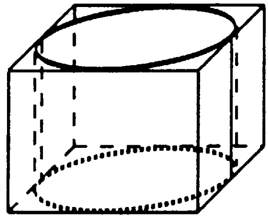


Рис. 139

$t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

11. Компания «Янтарь» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2009 году, имея капитал в размере 350 000 рублей. Каждый год, начиная с 2010 года, она получала прибыль, которая составляла 200 % от капитала предыдущего года. А компания «Яшма» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2011 году, имея капитал в размере 700 000 рублей, и, начиная с 2012 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400 % от капитала предыдущего года. На сколько рублей капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2014 года, если прибыль из оборота не изымалась?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x-4)^2(x+8) - 206$ на отрезке $[-8;\ 4]$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \cos 2x = 2$;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 4.

а) Докажите, что угол между прямыми AD и B_1E_1 равен 60°.

б) Найдите угол между плоскостями B_1AD и B_1AE_1.

15. Решите неравенство $\dfrac{5^x + \log_5^2 x - 20}{\log_5 x - 5^x} \geqslant -1$.

16. В каждый угол равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = 10$, $AC = BC = 13$, вписана окружность радиусом r, точки O_1, O_2 и O_3 центры этих окружностей. Найдите:

а) радиус окружности вписанной в треугольник ABC ;

б) радиус r, если площадь треугольника $O_1O_2O_3$ равна половине площади треугольника ABC .

17. В пчелином улье после зимовки сохранилось некоторое количество пчел. Готовясь к летнему медосбору, пчелиная семья ежемесячно увеличивалась на 40 %, но из-за различных неблагоприятных факторов рой ежемесячно терял 2 000 пчел. Несмотря на это, через четыре месяца количество пчёл в улье составило 62 624. Сколько пчёл было в улье после зимовки? Для определенности добавим, что ежемесячно сначала происходит увеличение пчелиной семьи на 4 %, а затем потеря 2 000 пчёл, а не наоборот.

18. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система имеет единственное решение: $\begin{cases} (|x| - 7)^2 + (y - 3)^2 = 7, \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

19. Страницы тетради пронумерованы на полиграфической фабрике числами от 1 до 36. Девочка на случайной странице записывает 0 и нумерует далее страницы тетради числами 1, 2, 3, ...до конца тетради без пропусков, возвращается к странице с 0 и, листая страницы тетради назад, записывает числа -1, -2, -3,...до начала тетради без пропусков. Сумма чисел, которые записала девочка на страницах этой тетради, равна S. На какой странице по фабричной нумерации девочка записала число 0, если а) $S = 18$; б) $S = 630$; в) $S = 450$.

Вариант № 33

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. На счету Витиного мобильного телефона было 52 рубля, а после разговора с Настей осталось 16 рублей. Сколько минут длился разговор с Настей, если одна минута разговора стоит 1 рубль 20 копеек?

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта «2+2» во все дни с 1 по 20 ноября 2014 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта «2+2» впервые приняло наибольшее значение (см. рис. 140).

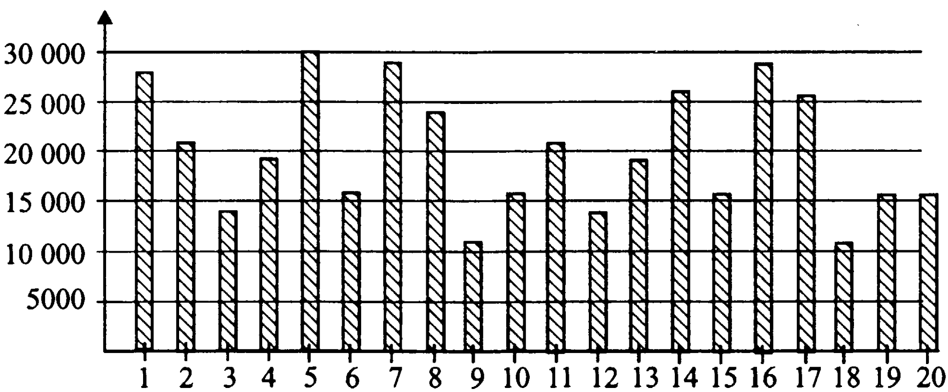


Рис. 140

3. Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (3; 7), (3; 11), (6; 7), (6; 11).

4. Охотник дядя Юра попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного ружья. Если дядя Юра стреляет из непристрелянного ружья, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 12 ружей, из них только 3 пристрелянные. Охотник дядя Юра видит на стене муху, наудачу хватает первое попавшееся ружьё и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что он промахнётся.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(12 - x) = 4$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 53. Тангенс острого угла равен $\frac{6}{11}$. Найдите высоту трапеции.

7. На рисунке 141 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 18x^2 + 221x - \frac{1}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

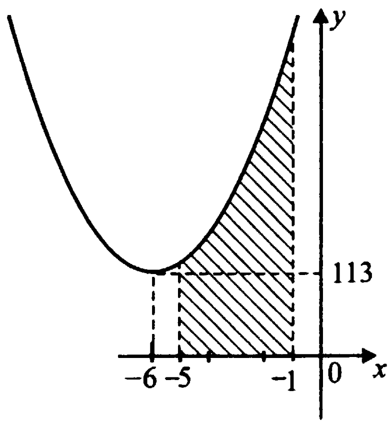


Рис. 141

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 24$, $AA_1 = 18$. Найдите синус угла между прямыми CD и A_1C_1.

Часть 2

9. Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{9a+b}{3a-2b} = 4$.

10. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость v увеличивается по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l км — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав три километра, приобрести скорость 60 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

11. Плиточник должен уложить 320 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 6 м^2 в день больше, чем запланировал, то работу закончит на 12 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{48}{x} + 3x + 204$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin x + |\cos x| - 3\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14. В правильном тетраэдре $SABC$ на ребре AC взята точка F так, что $AF : FC = 2 : 1$.

а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки B, F и высоту грани BSC, проведённую к ребру SC.

б) Найдите расстояние от точки F до плоскости BSC, если ребро тетраэдра равно 12.

15. Решите неравенство $\frac{(3^x - 27)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 5})(|x + 2| - |x|)} \geqslant 0$.

16. В треугольнике ABC окружность проходит через точки B и C и пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Отрезок MN касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle ANM$.

б) Найдите MN, если $AB = 7$, $AC = 8$, $BC = 9$.

17. В бассейне проведены три трубы. Первая труба наливает 20 м^3 воды в час, вторая труба наливает в час на $2z$ м^3 меньше, чем первая ($0 < z < 10$), третья труба наливает в час на $10z$ м^3 больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 20 % бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,8 бассейна. При каком значении z бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 3|x - a| - 7x \leqslant -2a$$

имеет единственное решение.

19. У Пети есть клетчатая доска размером 9×9. Соседними считаются клетки, границы которых имеют общий отрезок. Начальной клеткой будем считать клетку, расположенную в левом нижнем углу доски. В левом нижнем углу доски стоит фигура «Кентавр». «Кентавр» ходит по клеткам доски ходом $(k; m)$, то есть сначала смещается на k клеток по горизонтали или вертикали, а затем на m клеток в перпендикулярном направлении. Числа k и m — целые неотрицательные.

а) Может ли «Кентавр» через несколько ходов оказаться в клетке, соседней с начальной, если $k = 1, m = 2$?

б) Может ли «Кентавр» через несколько ходов оказаться в клетке, соседней с начальной, если $k = 1, m = 3$?

в) При каком наибольшем k «Кентавр» через несколько ходов может оказаться в клетке, соседней с начальной, если $m = 8$?

Вариант № 34

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Боря отправил SMS-сообщения с поздравлениями по случаю 8 марта 42 девушкам. Стоимость одного SMS-сообщения составляет 70 копеек. Перед отправкой сообщений на счету у Бори было 60,4 рубля. Сколько рублей останется у Бори после отправки всех сообщений?

2. На диаграмме (см. рис. 142) показано количество посетителей сайта «2 + 2» во все дни с 15 по 30 мая 2014 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта «2 + 2» впервые приняло наибольшее значение.

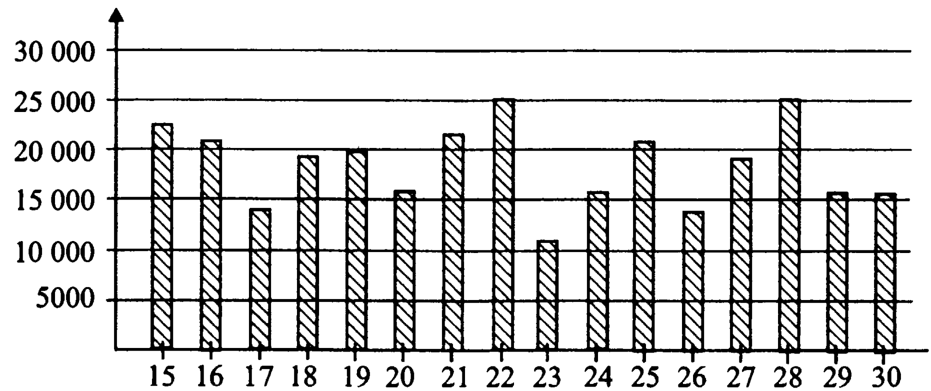


Рис. 142

3. Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (4; 8), (4; 29), (24; 8), (24; 29).

4. Ковбой Гена попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Гена стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 6 револьверов, из них 4 пристрелянные. Ковбой Гена видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Гена промахнётся.

5. Найдите корень уравнения $\log_6(144 + x) = 3$.

6. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 25. Высота трапеции равна 26. Тангенс острого угла равен $\frac{13}{9}$. Найдите большее основание.

7. На рисунке 143 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -2x^3 - 27x^2 - 108x + 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

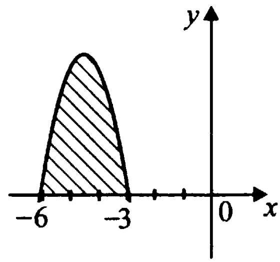


Рис. 143

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 9$, $AD = 80$, $AA_1 = 60$. Найдите синус угла между прямыми DD_1 и B_1C.

Часть 2

9. Найдите $\frac{5a - b}{a + 3b}$, если $\frac{b}{a} = -3$.

10. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l км — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,5 километра, приобрести скорость 62 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

11. Плиточники должны уложить 300 м^2 плитки. Если они будут укладывать на 10 м^2 в день больше, чем запланировали, то закончат работу на 1 день раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планируют укладывать плиточники?

12. Найдите точку максимума функции $y = \frac{50}{x} + 2x + 307$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $|\sin x| - 5\sin x + 4\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильном тетраэдре $SABC$ на ребре AC взята точка K так, что $AK : KC = 2 : 1$.

а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки B, K и медиану грани BSC, проведённую к ребру SC.

б) Секущая плоскость делит тетраэдр на две части. Найдите объём большей части, если ребро тетраэдра равно 6.

15. Решите неравенство $\dfrac{(5^x - 125)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+10})(|x-8| - |x|)} \geqslant 0$.

16. В треугольнике ABC окружность проходит через точки B и C и пересекает стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle ALK$.

б) Найдите KL, если $AB = 9$, $AC = 10$, $BC = 11$.

17. В бассейне проведены три трубы. Первая труба наливает 40 м^3 воды в час, вторая труба наливает в час на $2k$ м^3 меньше, чем первая ($0 < k < 20$), третья труба наливает в час на $10k$ м^3 больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 0,2 бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 80 % бассейна. При каком значении k бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 5|x - a| - 7x \leqslant -4a$$

имеет единственное решение.

19. У Максима есть клетчатая доска размером 10×10. В клетке, расположенной в левом нижнем углу доски, стоит фигура «Кентавр». «Кентавр» ходит по клеткам доски ходом $(k; m)$, то есть сначала смещается на k клеток по горизонтали или вертикали, а затем на m клеток в перпендикулярном направлении. Числа k и m — целые неотрицательные.

а) Может ли «Кентавр» через несколько ходов оказаться в правом нижнем углу доски, если $k = 1, m = 2$?

б) Может ли «Кентавр» через несколько ходов оказаться в правом нижнем углу доски, если $k = 2, m = 4$?

в) При каком наибольшем k «Кентавр» через несколько ходов может оказаться в правом нижнем углу доски, если $m = 9$?

Вариант № 35

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. На день рождения принято дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 80 рублей за штуку. У Никиты есть 1 000 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить букет Оле на день рождения?

2. На графике (см. рис. 144) изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 80 Н·м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение?

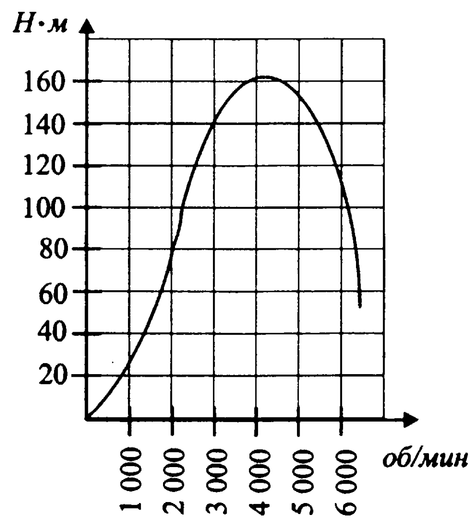


Рис. 144

3. На клетчатой бумаге (см. рис. 145) с размером клетки 1 × 1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.

4. Всего в 11-х классах 51 учащийся, среди них два друга — Андрей и Виталий. Учащихся случайным образом делят на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Виталий окажутся в одной группе.

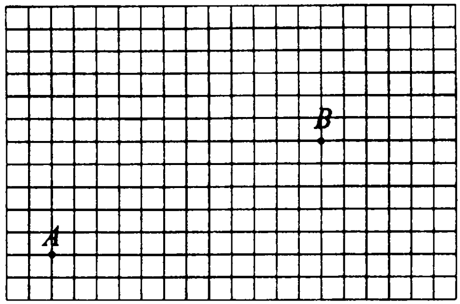


Рис. 145

5. Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi(x-14)}{3}=0{,}5$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 26 и 8, а её периметр равен 64 (см. рис. 146). Найдите площадь трапеции.

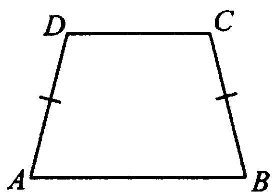


Рис. 146

7. Прямая $y = 2x + 4$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 8x + 7$. Найдите a.

8. В сосуде, имеющем форму конуса (см. рис. 147), уровень жидкости достиг $\dfrac{3}{4}$ высоты. Объём этой жидкости равен 54 мл. Сколько миллилитров жидкости надо долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{(a+7)^2}+\sqrt{(a-15)^2}$ при $-7 \leqslant a \leqslant 15$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7\cdot10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot K^4}$ — постоянная, S — площадь по-

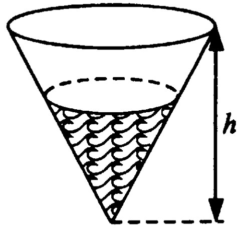


Рис. 147

верхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности звезды равна $\frac{6}{125} \cdot 10^{23}$ м^2, а мощность её излучения равна $1{,}71 \cdot 10^{29}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

11. Семья состоит из мужа, жены и их сына-студента. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 70 %. Если бы стипендия сына уменьшилась вчетверо, общий доход семьи сократился бы на 3 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

12. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 14)^3 - 3x + 19$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $8^x - 3 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 12 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1; 2]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Через середину ребра SD и вершину A проведена плоскость параллельно SB.

а) Постройте сечение пирамиды данной плоскостью.

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 3\sqrt{2}$, $AS = 7$.

15. Решите неравенство $(9^x + 3^x)^2 - 8 \cdot (9^x + 3^x) + 12 \leqslant 0$.

16. Стороны BC и CD квадрата $ABCD$ являются сторонами равносторонних треугольников BCM и DCN соответственно, точки M и N лежат вне квадрата. Прямая AM пересекает BC в точке K.

а) Докажите, что $\angle AMC = 45°$.

б) Найдите KN, если $AB = \sqrt{8 + 3\sqrt{3}}$.

17. В лагерь 79 детей везут двумя автобусами по 40 и 39 детей соответственно. Каждому ребёнку в дорогу полагается ровно один фрукт. Имеется 45 яблок и 34 груши. Как нужно распределить фрукты по автобусам, чтобы процентные содержания яблок в автобусах (относительно общего числа фруктов в каждом автобусе) отличались минимально?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{4-x^2} - 2|x-a| = a$ имеет ровно один корень.

19. а) Даны 4 первых члена непостоянной арифметической прогрессии: a_1, a_2, a_3, a_4. Вычислили средние арифметические пар соседних членов. Могли ли три полученных числа образовать геометрическую прогрессию?

б) $a_1, a_2, \ldots, a_6$ — первые члены непостоянной возрастающей арифметической прогрессии. Известно, что числа a_1, среднее арифметическое чисел a_2, a_3 и среднее арифметическое чисел a_4, a_5, a_6 являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите, во сколько раз первый член арифметической прогрессии больше её разности.

в) На доске написаны числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n — первые члены непостоянной арифметической прогрессии. Каждым шагом вместо записанных чисел пишут средние арифметические пар соседних членов (например, после первого шага на доске будут написаны числа $\frac{a_1+a_2}{2}$, $\frac{a_2+a_3}{2}$, $\ldots$, $\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$). Так делают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Известно, что последнее число совпало с одним из чисел, записанных на доске первоначально. Найдите, при каких значениях n это возможно, и для каждого n укажите номер члена, с которым совпало последнее число.

Вариант № 36

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 2 000 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы испанского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог составляет 13 % гонорара, тюльпаны стоят 170 рублей за штуку и букет должен состоять из нечётного числа цветов?

2. На графике (см. рис. 148) изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 50 Н·м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение?

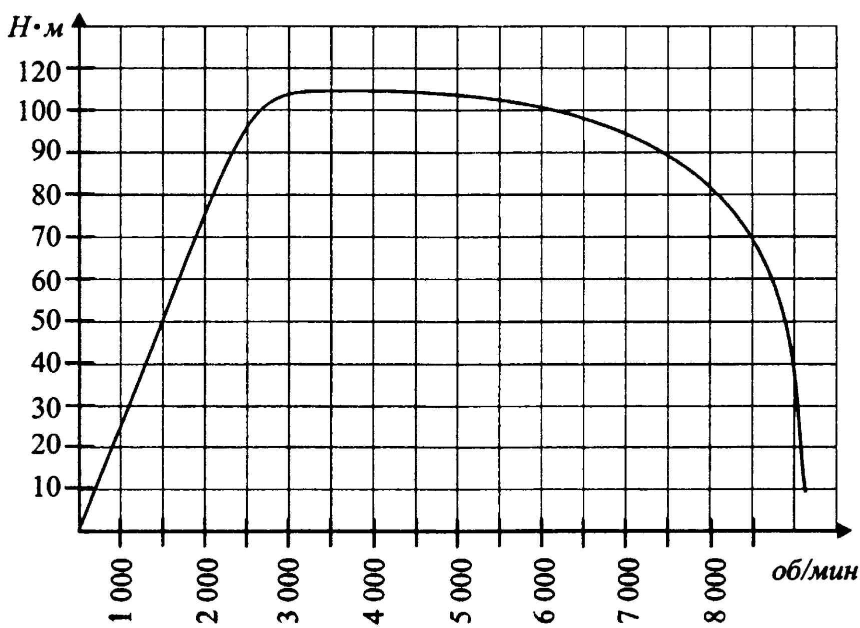


Рис. 148

3. На клетчатой бумаге (см. рис. 149) с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.

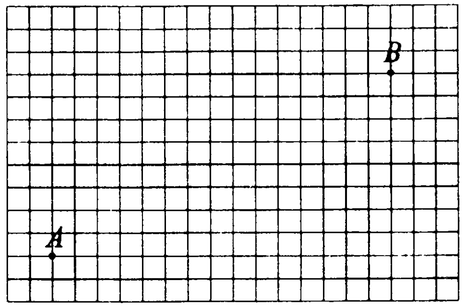


Рис. 149

4. В классе 16 учащихся, среди них два брата — Борис и Аркадий. Учащихся случайным образом делят на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Борис и Аркадий окажутся в одной группе.

5. Решите уравнение $\cos\dfrac{\pi(x+5)}{6} = -\dfrac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 3 и 15, а её площадь равна 72 (см. рис. 150). Найдите периметр трапеции.

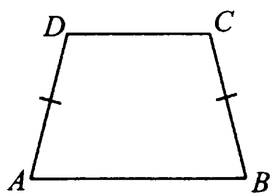


Рис. 150

7. Прямая $y = 10x - 1$ является касательной к графику функции $y = 7x^2 - 4x + c$. Найдите c.

8. В сосуде, имеющем форму конуса (см. рис. 151), наполненном доверху жидкостью, объём которой 160 мл, открыли кран и вылили жидкость до уровня $\dfrac{1}{2}$ высоты. Сколько миллилитров жидкости вылили из сосуда?

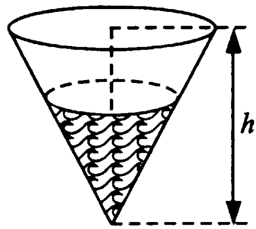


Рис. 151

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-23)^2}$ при $2 \leqslant a \leqslant 23$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot K^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности звезды равна $\dfrac{5}{48} \cdot 10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна $1{,}52 \cdot 10^{27}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

11. Семья состоит из мужа, жены и их сына-студента. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 116 %. Если бы стипендия сына уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

12. Найдите точку минимума функции $y = 10x - \ln(x-7)^{10} + 131$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $27^x - 4 \cdot 9^x - 3^x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-0{,}5; 1]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Через точку K ребра SD, где $SK : KD = 2 : 1$, и вершину A проведена плоскость параллельно SB.

а) Постройте сечение пирамиды данной плоскостью.

б) Найдите KP, где P — точка пересечения данной плоскости ребром CD, если $AB = 2$, $AS = 3\sqrt{13}$.

15. Решите неравенство $(4^x - 2^{x+1})^2 - 11 \cdot (4^x - 2^{x+1}) + 24 \geqslant 0$.

16. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ вовне его построены равносторонние треугольники BCM и DCN. Прямая AM пересекает BC в точке K.

а) Докажите, что $BK : KC = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

б) Найдите площадь треугольника AKN, если площадь квадрата равна $\sqrt{3}$.

17. В лагерь 81 ребёнка везут двумя автобусами по 40 и 41 ребёнку соответственно. Каждому ребёнку в дорогу полагается ровно один пирожок. Имеется 38 пирожков с вишней и 43 пирожка с курагой. Как нужно распределить пирожки по автобусам, чтобы процентные содержания пирожков с вишней в автобусах (относительно общего числа пирожков в каждом автобусе) отличались минимально?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3|x + a| - \sqrt{9 - x^2} + a = 0$ имеет ровно один корень.

19. а) Даны 4 первые члена непостоянной геометрической прогрессии с положительными членами: b_1, b_2, b_3, b_4. Вычислили средние геометрические пар соседних членов. Могли ли три полученных числа образовать арифметическую прогрессию?

б) $b_1, b_2, \ldots, b_5$ — первые члены непостоянной геометрической прогрессии с положительными членами. Выписали средние арифметические пар соседних чисел. Покажите, что 4 полученных числа образуют геометрическую прогрессию и найдите отношение её знаменателя к знаменателю исходной прогрессии.

в) На доске написаны числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — первые члены непостоянной геометрической прогрессии с положительными членами. Каждым шагом вместо записанных чисел пишут средние геометрические пар соседних членов (например, после первого шага на доске будут написаны числа $\sqrt{b_1 b_2}, \sqrt{b_2 b_3}, \ldots, \sqrt{b_{n-1} b_n}$). Так делают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Известно, что последнее число совпало с одним из чисел, записанных на доске первоначально. Найдите, при каких значениях n это возможно, и для каждого n укажите номер члена, с которым совпало последнее число.

Вариант № 37

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 15 %. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Варя хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 400 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) она должна положить в приёмное устройство данного терминала?

2. На графике (см. рис. 152) показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60 °C до температуры 90 °C.

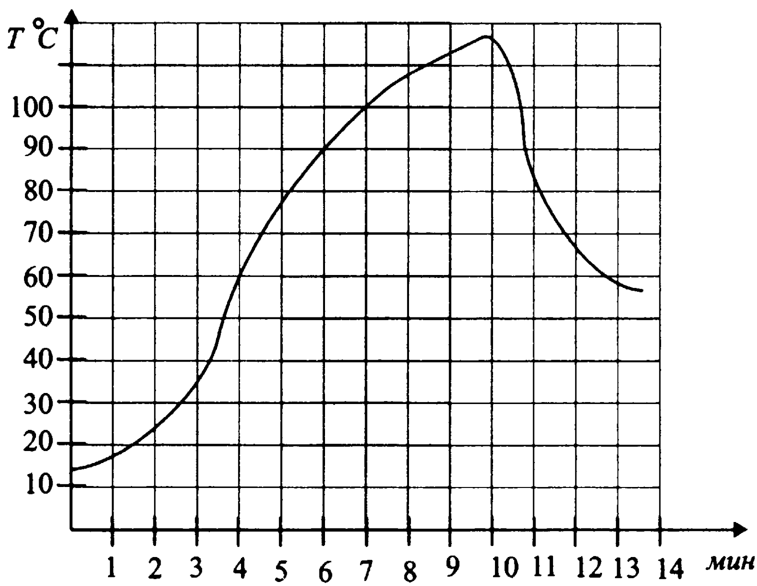


Рис. 152

3. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 153).

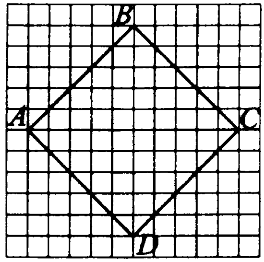


Рис. 153

4. В Сказочной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,6 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 18 сентября, погода в Сказочной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 21 сентября в Сказочной стране будет отличная погода.

5. Найдите корень уравнения $\log_{x-7} 81 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10, основание равно 12 (см. рис. 154. Найдите радиус вписанной окружности.

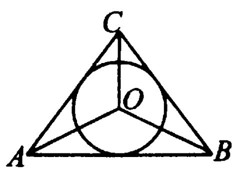


Рис. 154

7. Прямая $y = 5x + 17$ является касательной к графику функции $y = 12x^2 + bx + 20$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

8. Если каждое ребро куба увеличить на 3, то площадь его поверхности увеличится на 306 (см. рис. 155). Найдите ребро куба.

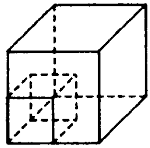


Рис. 155

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt[24]{k}\cdot\sqrt[8]{k}}$ при $k = 343$.

10. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \dfrac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в $с^{-1}$), A_0 — постоянный положительный параметр, $\omega_p = 420\ c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более, чем на одну двадцать четвёртую от A_0. Ответ выразите в $с^{-1}$.

11. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 105 метров, второй — длиной 100 метров. В некоторый момент времени второй сухогруз оказывается позади первого, и расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 500 метров. Через 13 минут после этого уже первый сухогруз отстаёт от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 400 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 961}$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7^{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)} = 49^{\cos x}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 4]$.

14. Образующая конуса равна диаметру его основания. В основание конуса вписан правильный шестиугольник. Через сторону этого шестиугольника и середину высоты конуса проведена плоскость α.

а) Докажите, что угол между плоскостью основания конуса и плоскостью α равен 45°.

б) Найдите площадь сечения плоскостью α шара, вписанного в конус, если радиус основания конуса равен 2.

15. Решите неравенство $\log_{15}(x^2 - 6x + 8) \geqslant \log_{x-1}(x^2 - 6x + 8)$.

16. Известно, что $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник.

а) Докажите, что сумма длин диагоналей пятиугольника меньше удвоенного периметра.

б) Найдите сумму длин диагоналей данного пятиугольника, если $\triangle BED$ — равносторонний, $AB = AE = BC = CD = \sqrt{3}$, $\angle BAE = \angle ABC = \angle BCD$.

17. В магазин привезли учебные пособия для школьников по трём предметам: русский язык, математика, обществознание, — в соотношении $9 : 8 : 7$ соответственно. За неделю продали 60 % завезённых пособий, а количество оставшихся оказалось распределено в соотношении $3 : 1 : 2$ между теми же предметами (в том же порядке). Сколько процентов учебных пособий по математике было продано?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-y)^2} \geqslant x + y, \\ (x - a^2)^2 + (y - 6a + 8)^2 = 16^{a-1} \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

19. Для каждого натурального числа введём число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (например, $1! = 1$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$). Определите наибольшее возможное значение в каждом из следующих случаев.

а) $n!$ имеет не более 3 различных простых делителей (простыми называются те натуральные числа, которые делятся только на себя и на единицу, исключая само число 1).

б) $n!$ не делится на 512.

в) $\log_7\left(\frac{(n!)^2}{4} - 90n! + 3201\right)$ определено и не превосходит 4.

Вариант № 38

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 5 %. Терминал принимает суммы кратные 50 рублям. Готовясь к длительной командировке, Мария Глебовна хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 3400 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) она должна положить в приёмное устройство данного терминала?

2. На графике 90 °С (см. рис. 156) показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 30 °С до температуры 90°.

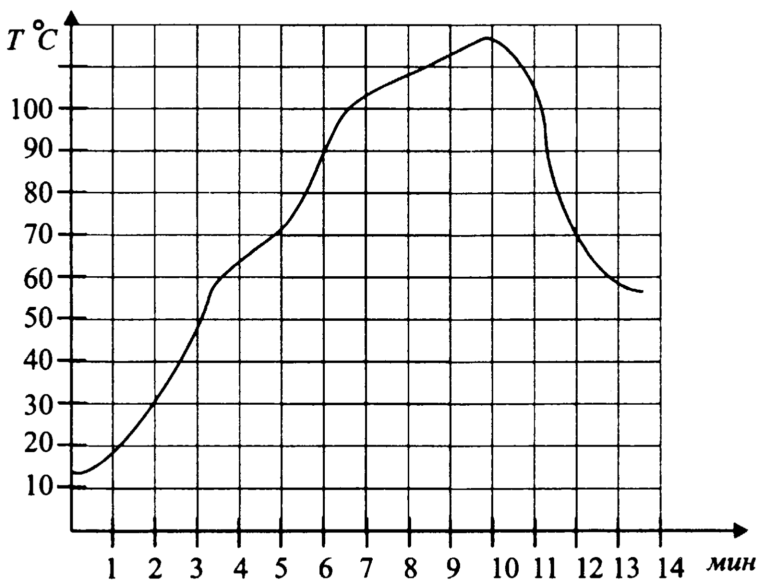


Рис. 156

3. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $3\sqrt{5}$ (см. рис. 157).

4. В Чудесной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно,

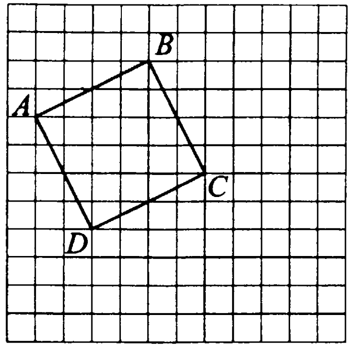


Рис. 157

что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 15 июля, погода в Чудесной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 18 июля в Чудесной стране снова будет хорошая погода.

5. Найдите корень уравнения $\log_{x+11} 625 = 4$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 15, основание равно 18 (см. рис. 158). Найдите радиус вписанной окружности.

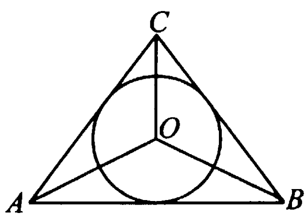


Рис. 158

7. Прямая $y = 7x + 3$ является касательной к графику функции $y = 8x^2 + bx + 11$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

8. Если каждое ребро куба увеличить на 9, то площадь его поверхности увеличится на 810 (см. рис. 159). Найдите ребро куба.

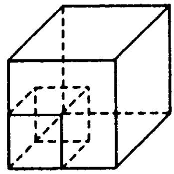


Рис. 159

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[5]{m}\cdot\sqrt[20]{m}}$ при $m = 1\,296$.

10. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \dfrac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в $с^{-1}$), A_0 — постоянный положительный параметр, $\omega_p = 416\ c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более, чем на 576 %. Ответ выразите в $с^{-1}$.

11. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 140 метров, второй длиной 80 метров. В некоторый момент времени второй сухогруз находился позади первого и расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 360 метров. Через 9 минут после этого уже первый сухогруз отстаёт от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 500 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

12. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 1024}$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)} = 25^{\frac{\cos^2 x}{2}}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-11; -4]$.

14. Образующая конуса равна диаметру его основания. В основание конуса вписан правильный треугольник. Через середину высоты конуса и сторону треугольника проведена плоскость α.

а) Докажите, что угол между плоскостью основания конуса и плоскостью α равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения плоскостью α шара, вписанного в конус, если радиус основания конуса равен $4\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 7x + 12) > \log_{x+5}(x^2 + 7x + 12)$.

16. Известно, что $LKMNP$ — правильный пятиугольник. Диагонали LM и KN пересекаются в точке T.

а) Докажите, что описанная окружность треугольника LNT касается прямой MN.

б) Найдите длину ML, если $LT = 4$.

17. В магазин привезли пачки печенья трёх видов: клубничное, кокосовое, малиновое, — в соотношении $8 : 1 : 3$. К концу дня продали 60 % пачек малинового печенья и 60 % пачек кокосового, при этом всего было продано 70 % пачек печенья. Сколько процентов пачек клубничного печенья магазин реализовал к концу дня?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \geqslant 0, \\ (y - a^2 - 3a + 18)^2 + (x - 6a)^2 = 3 \cdot |a|^{-\frac{a}{2}} \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

19. Для каждого натурального числа введём число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (например, $1! = 1$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$). Определите наибольшее возможное n в каждом из следующих случаев.

а) $\left(\frac{n!}{8}\right)$ не является натуральным числом.

б) $(n+2)! - 42(n!) < 0$.

в) $((n!)^2 - 12n!)$ не делится на 13.

Вариант № 39

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В обменном пункте одна паанга (денежная единица Королевства Тонга) стоит 27 рублей 20 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на паанги и купили 2 килограмма моллюсков по цене 4 паанги за килограмм. Во сколько рублей им обошлась покупка? Ответ округлите до целого числа.

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 160 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за четыре минуты.

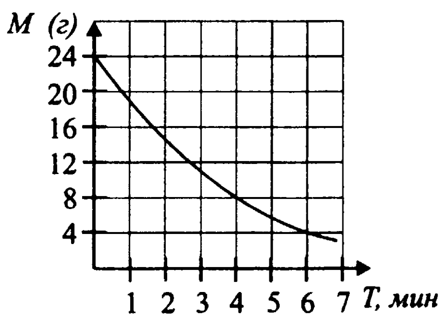


Рис. 160

3. Найдите (в см^2) площадь S закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см (см. рис. 161). В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

4. Чтобы поступить в институт на специальность «прикладная математика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 65 баллов по каждому из трёх предметов: математика, русский язык и информатика. Чтобы поступить на специальность «механика», нужно набрать не менее 65 баллов по каждому из трёх предметов: математика, русский язык и физика. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 65 баллов по математике,

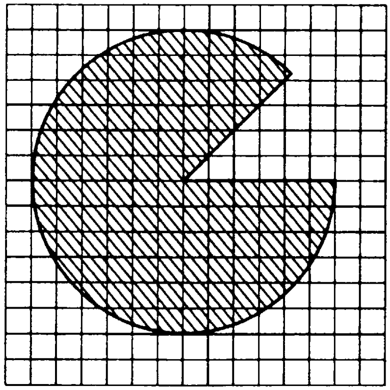


Рис. 161

равна 0,6, по русскому языку — 0,7, по информатике — 0,6 и по физике — 0,5. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

5. Решите уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{(x+10)\pi}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

6. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $46+23\sqrt{2}$ (см. рис. 162). Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

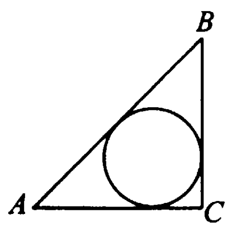


Рис. 162

7. На рисунке 163 изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-3; 6]$.

8. Объём тетраэдра равен 24. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра (см. рис. 164).

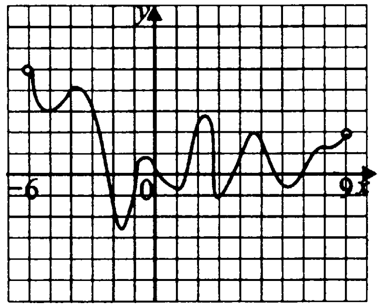


Рис. 163

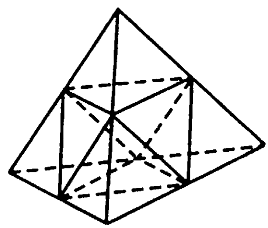


Рис. 164

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$ при $p(b) = \left(b + \frac{18}{b}\right)\left(18b + \frac{1}{b}\right)$, $b \neq 0$.

10. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = \text{const}$, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 7{,}29 \cdot 10^9$ Па·м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не ниже $3 \cdot 10^7$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

11. Два грузовых автомобиля участвуют в гонках. Им предстоит проехать 40 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 6 км. Оба автомобиля стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 2 часа 42 минуты. Чему равнялась скорость первого грузовика, если известно, что он в первый раз обогнал второй грузовик на круг через 20 минут? Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\operatorname{tg} x - 8x + 2\sqrt{3} - 7 - \frac{4\pi}{3}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{3\sqrt{2}}{\sin x} - \frac{2}{\sin^2 x} = 2$.

б) Найдите минимальное расстояние и минимальную длину дуги между несовпадающими точками единичной окружности, соответствующими корням уравнения.

14. Три шара касаются между собой и плоскостей двугранного угла. На одной из них точки касания образуют треугольник со стороной 5 единиц и прилегающими к ней углами $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$ и $\beta = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите расстояние между точками касания самого маленького из шаров с плоскостями и угол между плоскостями двугранного угла.

15. Решите неравенство $x \log_{\frac{1}{3}} (4 - 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}}) > 1$.

16. Найдите расстояние d между центрами вписанной в треугольник с углами 40° и 80° окружности и окружности, описанной вокруг этого треугольника окружностей, если $R = 1$ — радиус описанной окружности.

17. Андрей не поступил в университет на бюджетное отделение. Стоимость обучения в университете на коммерческой основе составляет 100 тысяч рублей в год. Отец Андрея взял кредит на 2 года в размере 100 000 рублей. В течение двух лет ежемесячно выплачивается одна и та же сумма. Она состоит из двух частей. Первая является суммой выплат в счёт погашения основного долга по кредиту, вторая составляет 2% от суммы, оставшейся после выплат в счёт погашения кредита за предыдущий месяц. Докажите, что:

а) ежемесячная постоянная сумма выплат равна

$$100\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{24}}{(1+0{,}02)^{24}-1};$$

б) сумма переплат по кредиту не больше 48 000 рублей.

18. При каких значениях параметра a прямые $(2a - a^2 + 4)x + 2y + 2 = 0$ и $(2a - a^2 + 7)y + 2x + a + 1 = 0$ не совпадают, но параллельны, а расстояние ρ между ними минимально?

19. Найдите все целые корни уравнения $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4y - 12z = 0$.

Вариант № 40

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 1

1. В обменном пункте один вáту (денежная единица Республики Вануату) стоит 0,54 российских рублей. Отдыхающие обменяли рубли на вануатские вáту и купили 3 килограмма водорослей по цене 15 вату за килограмм. Во сколько рублей им обошлась покупка? Ответ округлите до целого числа.

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 165 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за шесть минут.

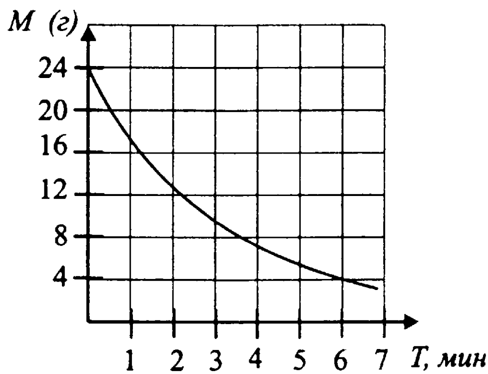


Рис. 165

3. Найдите (в см^2) площадь S закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см (см. рис. 166). В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

4. Чтобы поступить в институт на специальность «экономика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов: математика, русский язык и обществознание. Чтобы поступить на

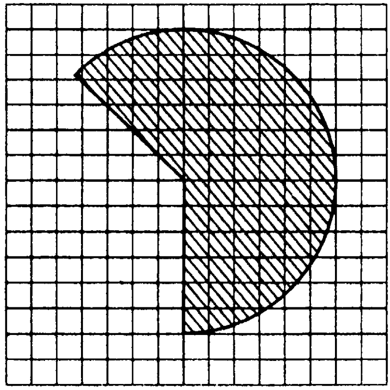


Рис. 166

специальность «юриспруденция», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов: математика, русский язык и история. Вероятность того, что абитуриент К. получит не менее 60 баллов по математике, равна 0,8, по русскому языку — 0,6, по истории — 0,2 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что К. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

5. Решите уравнение $\operatorname{tg}\pi\left(\frac{x+14}{9}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе укажите наименьший положительный корень.

6. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $54+27\sqrt{2}$ (см. рис. 167). Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

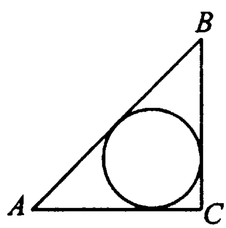


Рис. 167

7. На рисунке 168 изображён график функции $y=F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;8)$. Найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-3;6]$.

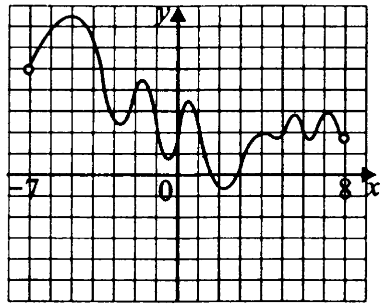


Рис. 168

8. Объём тетраэдра равен 32. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра (см. рис. 169).

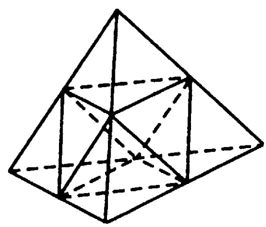


Рис. 169

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$ при $p(b) = \left(b - \frac{21}{b}\right)\left(-21b + \frac{1}{b}\right)$, $b \neq 0$.

10. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = \text{const}$, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10{,}24 \cdot 5\,000$ Па$\cdot$м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не ниже $1{,}6 \cdot 10^3$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

11. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 75 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонщика стартовали одно-

временно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 37,5 минут. Чему равнялась скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 10 минут? Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = -16x + 8\operatorname{tg} x + 4\pi + 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{27}}{\sin x} - \frac{3}{\sin^2 x} = 2$.

б) Найдите минимальное расстояние и минимальную длину дуги между несовпадающими точками единичной окружности, соответствующими корням уравнения.

14. Три шара с радиусами $r_1 = \frac{10}{3}$, $r_2 = \frac{15}{8}$ и $r_3 = \frac{6}{5}$ единиц касаются между собой и плоскостей двугранного угла. Найдите расстояние ρ между точками касания самого маленького из шаров с плоскостями.

15. Решите неравенство $x \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{28}{3} - 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}}\right) > 1$.

16. Найдите радиус R описанной вокруг треугольника с углами 40° и 80° окружности, если расстояние между центрами вписанной в треугольник окружности и окружности, описанной вокруг этого треугольника, $d = 4$.

17. Владимир приобрёл ноутбук. Для этого он взял кредит на год с ежемесячной выплатой 4000 рублей на следующих условиях. Каждый месяц сумма выплат состоит из двух частей: первая часть является суммой выплат в счёт погашения основного долга по кредиту, вторая составляет 2,5 % от суммы, оставшейся после выплат в счёт погашения кредита за текущий месяц.

Докажите, что:

а) сумма кредита равна $\frac{4000 \cdot ((1 + 0{,}025)^{12} - 1)}{0{,}025 \cdot (1 + 0{,}025)^{12}}$;

б) сумма кредита больше, чем 36 923 рубля.

18. При каких значениях параметра a прямые $(2a - a^2 + 4)x + 2y + 2 = 0$ и $(2a - a^2 + 7)y + 2x + a + 1 = 0$ совпадают? При этих значениях параметра найдите расстояние ρ между получившейся прямой и началом координат.

19. Найдите все целые корни уравнения $x^2+2y^2+3z^2-2x-8y-18z+25 = 0$.

Глава II. Решения избранных вариантов

Решение варианта 1

1. *Первый способ.*

Пусть x — число всех учащихся в школе. Тогда 25 % от x равно $\frac{25\,\% \cdot x}{100\,\%} = 0{,}25x$.

Из условия получаем уравнение $0{,}25x = 94$. Отсюда $x = \frac{94}{0{,}25} = 376$.

Второй способ.

Из условия следует, что 94 изучающих немецкий язык — это четверть от числа всех учащихся. Значит, всех учащихся в 4 раза больше 94, то есть $94 \cdot 4 = 376$.

Ответ: 376.

2. Наименьшая среднесуточная влажность воздуха за указанный период определяется по самой нижней точке графика. Непосредственно видно, что такая влажность была 17 февраля и её значение равно 71 %.

Ответ: 71.

3. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 5 = 35$ (см. рис. 1).

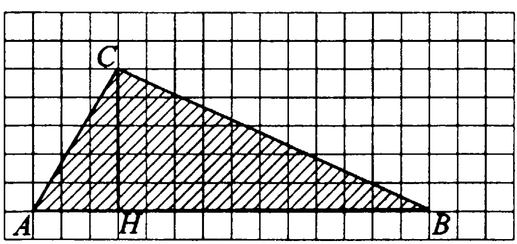


Рис. 1

Ответ: 35.

4. Из 2 000 насосов в среднем не подтекают $2\,000 - 28 = 1\,972$ насоса. Тогда вероятность того, что случайно выбранный насос не подтекает, равна $\frac{1\,972}{2\,000} = 0{,}986$.

Ответ: 0,986.

5. $2x^2 - 17x - 9 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{17 \pm 19}{4};$$

$$x_1 = \frac{17 - 19}{4} = -\frac{1}{2}; \; x_2 = \frac{17 + 19}{4} = 9.$$

Меньший корень равен $-0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

6. В прямоугольном $\triangle ACH$ $\sin\angle ACH = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ (см. рис. 2).

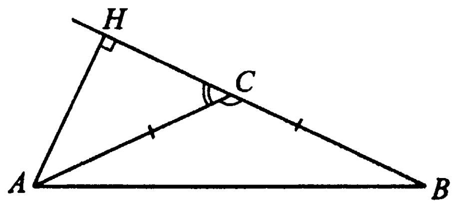


Рис. 2

Тогда $\sin\angle ACB = \sin(\pi - \angle ACH) = \sin\angle ACH = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

7. Из геометрического смысла производной следует, что

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$ (см. рис. 3).

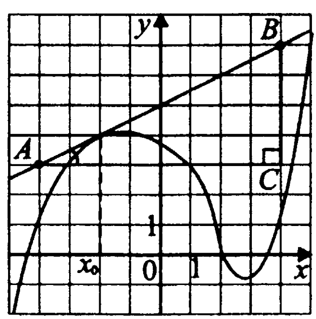


Рис. 3

Ответ: 0,5.

8. Пусть a — ребро исходного куба. Тогда его объём $V_1 = a^3$. После увеличения ребро куба будет равно $7a$, а его объём $V_2 = (7a)^3 = 343a^3$. Тогда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{343a^3}{a^3} = 343$.

Ответ: 343.

9. $\sqrt{146^2 - 110^2} = \sqrt{(146-110)(146+110)} = \sqrt{36 \cdot 256} = \sqrt{6^2 \cdot 16^2} = 6 \cdot 16 = 96$.

Ответ: 96.

10. Из формулы $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$ выразим высоту h: $l^2 = \frac{Rh}{500}$; $h = \frac{500l^2}{R}$.

По условию $l = 8$ км, $R = 6\,400$ км.

Следовательно, $h = \frac{500 \cdot 8^2}{6\,400} = 5$ (м).

Ответ: 5.

11. Автобус, выехавший из пункта B, до встречи прошёл путь $270 - 140 = 130$ (км) за 2,5 часа. Значит, его скорость равна $\frac{130}{2{,}5} = \frac{130 \cdot 2}{5} = 26 \cdot 2 = 52$ (км/ч).

Ответ: 52.

12. *Первый способ.*

$$y' = (\sqrt{x^2+10x+106})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+10x+106}} \cdot (x^2+10x+106)' =$$
$$= \frac{2x+10}{2\sqrt{x^2+10x+106}} = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+10x+106}}.$$

Уравнение $y' = 0$ имеет единственный корень $x_0 = -5$.

Из рисунка 4 следует, что $x_0 = -5$ — единственная критическая точка функции $y(x)$ и это точка минимума.

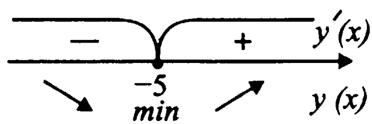


Рис. 4

Значит, $y(x_0) = y(-5) = \sqrt{(-5)^2+10\cdot(-5)+106} = \sqrt{25-50+106} = \sqrt{81} = 9$ — наименьшее значение функции $y(x)$.

Второй способ.

Графиком функции $f(x) = x^2 + 10x + 106$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, своего наименьшего значения функция $f(x)$ достигает в точке $x_0 = -\dfrac{10}{2 \cdot 1} = -5$ — абсциссе вершины параболы. Данная нам функция $y(x) = \sqrt{f(x)}$, очевидно, достигает своего наименьшего значения также в точке $x_0 = -5$. Значит, $y_{\text{наим.}} = y(-5) = 9$.

Ответ: 9.

13. а) Преобразуем уравнение:

$2\cos^2 x - 1 + 3\sqrt{3}(-\cos x) - 5 = 0,$

$2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - 6 = 0.$

Пусть $\cos x = t$, тогда $2t^2 - 3\sqrt{3}t - 6 = 0$.

$D = (3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 27 + 48 = 75.$

$t_{1,2} = \dfrac{3\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{4}$, $t_1 = 2\sqrt{3}$, $t_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos x = 2\sqrt{3}$, корней нет.

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$, найдём с помощью окружности (см. рис. 5).

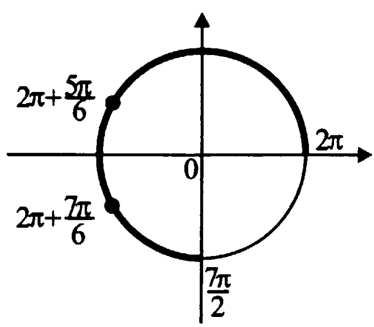


Рис. 5

$2\pi + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{17\pi}{6}$, $2\pi + \dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\dfrac{17\pi}{6}$; $\dfrac{19\pi}{6}$.

14. а) Прямая EF параллельна BC как средняя линия $\triangle SBC$ и, значит, EF параллельна плоскости основания ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по некоторой прямой PQ, параллельной EF (см. рис. 6).

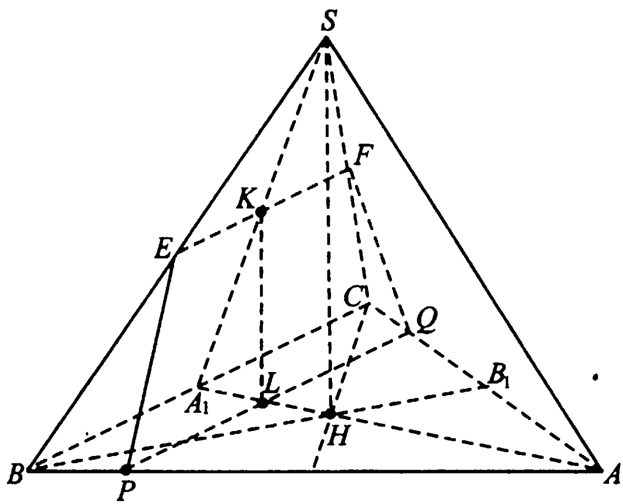


Рис. 6

Рассмотрим плоскость SAA_1.

Точка H — центр основания пирамиды, K — точка пересечения EF и SA_1, L — точка пересечения PQ и плоскости SAA_1.

Плоскости PEF и SAA_1 перпендикулярны основанию, значит, $KL \perp ABC$ и $KL \parallel SH$. EF — средняя линия $\triangle SBC$, K — середина A_1S, значит, L — середина A_1H, так как A_1H — проекция A_1S на плоскость основания. Медиана AA_1 делится точкой H в отношении $AH : HA_1 = 2 : 1$. Значит, $AL : LA_1 = 5 : 1$.

б) $PEFQ$ — трапеция, $EF = \frac{1}{2}BC = 12 : 2 = 6$,

$$PQ : BC = AL : AA_1 = \frac{5}{6},\ PQ = \frac{5BC}{6} = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10.$$

$$AH = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3} \cdot 12}{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$KL = \frac{1}{2}SH = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2.$$

$$S_{PEFQ} = \frac{1}{2}(EF + PQ) \cdot KL = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot 2 = 16.$$

Ответ: 16.

15. Сделаем замену $4^x = t$, тогда $\frac{t+2}{t-8} + \frac{t}{t-4} + \frac{8}{t^2 - 12t + 32} \leqslant 0$.

$$\frac{(t+2)(t-4) + t(t-8) + 8}{(t-8)(t-4)} \leqslant 0, \quad \frac{t^2 + 2t - 4t - 8 + t^2 - 8t + 8}{(t-8)(t-4)} \leqslant 0,$$

$$\frac{2t^2 - 10t}{(t-8)(t-4)} \leqslant 0, \quad \frac{2t(t-5)}{(t-8)(t-4)} \leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдём ОДЗ: $(t-8)(t-4) \neq 0$, $t \neq 8$, $t \neq 4$. Найдём нули дроби: $2t(t-5) = 0$, $t = 0$, $t = 5$.

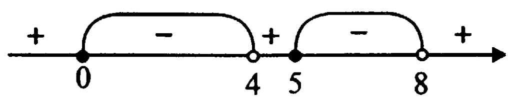


Рис. 7

$0 \leqslant t < 4$ или $5 \leqslant t < 8$ (см. рис. 7).

Если $0 \leqslant t < 4$, то $0 \leqslant 4^x < 4$, $4^x < 4^1$, $x < 1$.

Если $5 \leqslant t < 8$, то $5 \leqslant 4^x < 8$, $\log_4 5 \leqslant x < 1{,}5$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup [\log_4 5; 1{,}5)$.

16. а) Пусть O и O_1 — центры большей и меньшей окружностей соответственно (см. рис. 8). Точки A, O и O_1 лежат на одной прямой, AO — диаметр, значит, $\angle ODA = \angle OEA = \angle ORA = 90°$. $\triangle ODA = \triangle OBD$ (по гипотенузе и катету), значит, $BD = DA$. Аналогично $\triangle OEA = \triangle OEC$ и E — середина AC. DE — средняя линия $\triangle ABC$ $\Rightarrow DE \parallel BC$.

б) Пусть $OH \perp BC$, тогда из $\triangle OBH$ получаем: $OH^2 = OB^2 - BH^2$, $OH = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. R — точка касания, значит, $O_1R \perp CB$, тогда $O_1R \parallel OH$ (как перпендикуляры к одной прямой).

Проведём $O_1M \perp OH$, O_1MHR — прямоугольник, $O_1R = MH$. $OM = HM - OH = RO_1 - OH = \frac{AO}{2} - OH = \frac{17}{2} - 8 = 0{,}5$.

$$MO_1 = \sqrt{O_1O^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}, \ RH = MO_1 = 6\sqrt{2}.$$

Получаем из $\triangle OHR$: $OR^2 = OH^2 + HR^2 = 8^2 + (6\sqrt{2})^2 = 136$. В $\triangle ARO$

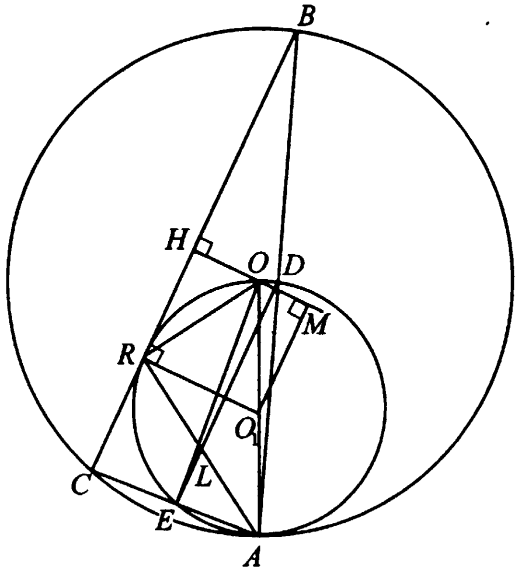


Рис. 8

получим: $AR^2 = AO^2 - OR^2 = 17^2 - 136 = 153$. $DE \parallel BC$, $BD = DA \Rightarrow$ $AL = LR = \frac{1}{2}AR = \frac{\sqrt{153}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{153}}{2}$.

17. Пусть сумма кредита равна A. После выплаты клиента долг уменьшается на одинаковую сумму, через 15 месяцев он станет 0, значит, после 1-й выплаты он уменьшится на $\frac{A}{15}$ и станет $\frac{14A}{15}$, после 2-й — $\frac{13A}{15}$, ..., после 14-й — $\frac{A}{15}$, после 15-й — 0.

Если долг увеличится на $a\%$, то сумма долга вырастет в $q = \frac{100 + a}{100}$ раз. Значит, 3 июля долг станет равен $A \cdot q$, через месяц — $\frac{14A}{15} \cdot q$, через 2 месяца — $\frac{13A}{15}q, \ldots$, через 14 месяцев — $\frac{A}{15}q$.

Выплаты — разность между суммой долга до и после выплаты клиента, то есть в 1-й месяц $A \cdot q - \frac{14A}{15}$, во 2-й месяц $\frac{14A}{15}q - \frac{13A}{15}, \ldots,$

в предпоследний месяц $\frac{2A}{15}q - \frac{A}{15}$, в последний $\frac{A}{15}q - 0$. Всего следует выплатить $Aq - \frac{14A}{15} + \frac{14A}{15}q - \frac{13A}{15} + \ldots + \frac{2A}{15}q - \frac{A}{15} + \frac{A}{15}q - 0$, что по условию равно $1{,}16A$.

$$Aq\left(1 + \frac{14}{15} + \frac{13}{15} + \ldots + \frac{1}{15}\right) - A\left(\frac{14}{15} + \frac{13}{15} + \ldots + \frac{1}{15}\right) =$$

$$= A\left(1 + \frac{14}{15} + \frac{13}{15} + \ldots + \frac{1}{15}\right)(q-1) + A = A + A(q-1)\frac{(15+1)\cdot 15}{15\cdot 2} =$$

$$= A + A(q-1)\cdot 8 = A(1 + (q-1)\cdot 8) = 1{,}16A.$$

$1 + (q-1)\cdot 8 = 1{,}16$, $(q-1)\cdot 8 = 0{,}16$, $q - 1 = 0{,}02$, $q = 1{,}02$, $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

1) Если $x^2 + y^2 - 25 \geqslant 0$ (данному неравенству удовлетворяют точки вне круга и точки окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом 5), то получаем уравнение
$8x - 8y - 40 = x^2 + y^2 - 25$,
$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 = 32 - 40 + 25$,
$(x-4)^2 + (y+4)^2 = 17$.

Полученное уравнение задаёт окружность с центром $A(4; -4)$ и радиусом $\sqrt{17}$. Учитывая условие $x^2 + y^2 - 25 \geqslant 0$, получаем дугу с концами в точках $M(0; -5)$ и $N(5; 0)$ (см. рис. 9).

2) Если $x^2 + y^2 - 25 \leqslant 0$ (это точки круга), то получаем уравнение
$8x - 8y - 40 = -x^2 - y^2 + 25$,
$x^2 + 8x + y^2 - 8y = 65$,
$(x+4)^2 + (y-4)^2 = 97$. Полученное уравнение задаёт окружность с центром $B(-4; 4)$ и радиусом $\sqrt{97}$. Учитывая условие, получаем дугу с концами в точках M и N.

Рассмотрим второе уравнение системы $y = ax - 5$. Оно задаёт прямую l, проходящую через точку $M(0; -5)$.

При $a = 1$ прямая проходит через точки M и N и исходная система имеет 2 решения, при $a > 1$ прямая имеет с дугами единственную общую точку M.

Найдём a, при котором прямая l касается окружности с центром B в точке M. Тогда $l \perp BM$. Прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно -1.

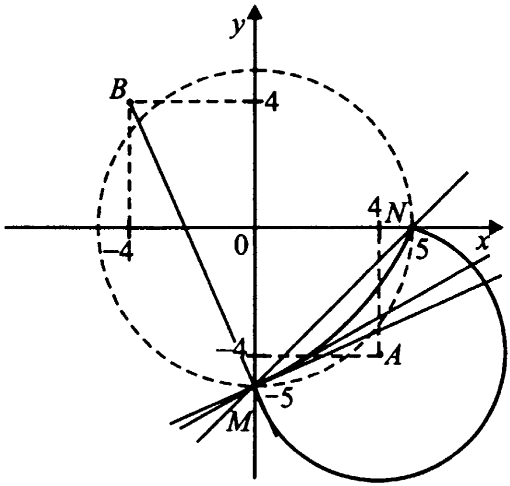


Рис. 9

$K_{BM} = -\frac{9}{4}$, $K_{BM} \cdot a = -1$, $a = \frac{4}{9}$. При этом прямая имеет две общие точки с дугами, то есть в системе 2 решения.

При $a < \frac{4}{9}$ у прямой с меньшей дугой общая точка M, а с большей — M и ещё не более одной точки. Значит, система имеет не больше двух решений.

При $\frac{4}{9} < a < 1$ прямая имеет с дугами по две общие точки, одна из которых M.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $\frac{4}{9} < a < 1$.

Ответ: $\left(\frac{4}{9}; 1\right)$.

19. а) Пусть тестировались трое участников, набравших 20, 48 и 60 баллов. Средний балл не сдавших тест равен $(20 + 48) : 2 = 34$ балла. После прибавления баллы стали 25, 53 и 65. Средний балл несдавших стал равен 25, он понизился.

б) Рассмотрим пример пункта а). Средний балл сдавших стал равен $(53 + 65) : 2 = 59$, что меньше среднего балла сдавших до прибавления, который был равен 60.

в) Пусть в тестировании принимало участие N участников, не сдали тест k участников, после добавления баллов не сдали тест p участников.

Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_N$ — баллы участников, тогда $a_k < 50$, $a_{k+1} \geqslant 50$, $a_p + 5 < 50$, $a_{p+1} + 5 \geqslant 50$.

Средний балл до добавления:

несдавших $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = 40$, сдавших $\dfrac{a_{k+1} + \ldots + a_N}{N-k} = 60$,

всех участников $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_N}{N} = 50$.

Тогда $40k + 60(N-k) = 50N$, $40k + 60N - 60k - 50N = 0$, $10N = 20k$, $N = 2k$.

Так как k и N целые, то N делится на 2.

Аналогично после добавления получим: $43p + 63(N-p) = 55N$, $20p = 8N$, $2N = 5p$, N делится на 5.

N делится на 2 и на 5. Значит, N делится на 10.

Пример для 10 участников.

4 получили по 38 баллов, 1 — 48, 5 — по 60 баллов.

Средний балл у тех, кто не сдал после повышения, — $(4 \cdot 38 + 48) : 5 = 40$ баллов.

Средний балл у несдавших после повышения — 43 балла.

Средний балл у сдавших — $(48 + 5 + 5 \cdot 65) : 6 = 63$ балла.

Условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 10.

Решение варианта 5

1. Пусть цена футболки была снижена на x %. Из условия получаем, что она снижена на $600 - 480 = 120$ рублей, тогда $x = \dfrac{120\text{ р.}}{600\text{ р.}} \cdot 100\,\% = 20\,\%$.

Ответ: 20.

2. Наибольшая средняя температура воздуха за год определяется по самому высокому столбику диаграммы. Непосредственно видно, что такой температуре соответствует восьмой месяц.

Ответ: 8.

3. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BH$ (см. рис. 10).

$$AC = 6 - 1 = 5,\ BH = 10 - 4 = 6,\ S_{ABC} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$$

Ответ: 15.

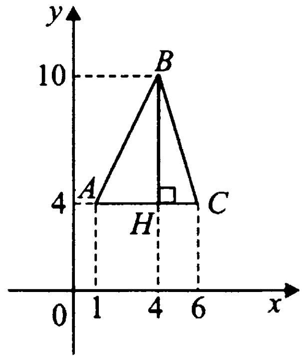


Рис. 10

4. Вероятность того, что начинать игру должен Миша, равна $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

5. $\frac{3}{11}x = 27\frac{9}{11}$, $x = 27\frac{9}{11} : \frac{3}{11}$, $x = \frac{306 \cdot 11}{11 \cdot 3}$, $x = 102$.

Ответ: 102.

6. В прямоугольном треугольнике ABC (см. рис. 11) $\angle A = 90^\circ - \angle B$, $\sin A = \sin(90^\circ - \angle B) = \cos \angle B = 0{,}7$.

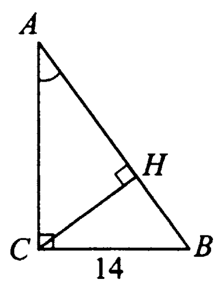


Рис. 11

В $\triangle BHC$ $\cos \angle B = \frac{BH}{BC}$, $BH = BC \cdot \cos \angle B = 14 \cdot 0{,}7 = 9{,}8$.

Ответ: 9,8.

7. Производная функции положительна, если функция возрастает. По рисунку определяем целые точки, в которых функция возрастает: -6, -5, -4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7.

Таких точек 10.

Ответ: 10.

8. Плоскость, параллельная боковому ребру, проходит через среднюю линию основания, значит, площадь основания отсечённой призмы уменьшилась в 2^2 раза по сравнению с площадью основания заданной призмы (средняя линия в 2 раза меньше стороны, которой она параллельна). Высота отсечённой призмы равна высоте заданной призмы.

Следовательно, объём отсечённой призмы уменьшился в 4 раза и стал равным $36 : 4 = 9$.

Ответ: 9.

9. $0{,}6^{\frac{3}{11}}\cdot 5^{\frac{10}{11}}\cdot 45^{\frac{4}{11}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{11}}\cdot 5^{\frac{10}{11}}\cdot (5\cdot 9)^{\frac{4}{11}} = 3^{\frac{3}{11}}\cdot 5^{-\frac{3}{11}}\cdot 5^{\frac{10}{11}}\cdot 5^{\frac{4}{11}}\cdot (3^2)^{\frac{4}{11}} =$
$= 3^{\frac{3}{11}+\frac{8}{11}}\cdot 5^{-\frac{3}{11}+\frac{10}{11}+\frac{4}{11}} = 3\cdot 5 = 15.$

Ответ: 15.

10. В формулу $r(p) = q\cdot p$ подставим $q = 300 - 60p$, получим:
$r(p) = (300 - 60p)p$.

По условию $r(p) \geqslant 315$, следовательно, $60p^2 - 300p + 315 \leqslant 0$,
$4p^2 - 20p + 21 \leqslant 0$.

Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 12).

$4p^2 - 20p + 21 = 0$, $p_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{4} = \dfrac{10 \pm 4}{4}$, $p_1 = 3{,}5$, $p_2 = 1{,}5$.

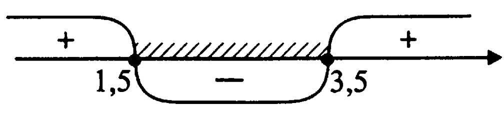


Рис. 12

Максимальный уровень цены 3,5 тыс. руб.

Ответ: 3,5.

11. Пусть x г было взято 15 %-го раствора, тогда $(750 - x)$ г было взято 25 %-го раствора. $\dfrac{x\cdot 15}{100} = (0{,}15x)$ г кислоты содержал 15 %-й раствор.

$\dfrac{(750 - x)\cdot 25}{100} = (187{,}5 - 0{,}25x)$ г кислоты содержал 25 %-й раствор.

13. Зак. № 41

В результате смешивания получили 20%-й раствор, который содержал $\frac{750 \cdot 20}{100} = 150$ г кислоты.

Составим и решим уравнение.

$0{,}15x + 187{,}5 - 0{,}25x = 150,\ 0{,}1x = 37{,}5,\ x = 375.$

375 г — масса 15%-го раствора.

Ответ: 375.

12. $y = (x+24)e^{x-70}$.

$y' = (x+24)'e^{x-70} + e^{x-70}\cdot(x-70)'\cdot(x+24) = e^{x-70} + e^{x-70}(x+24) =$
$= e^{x-70}(x+25)$.

Уравнение $y' = 0$ имеет единственный корень $x = -25$.

Из рисунка 13 следует, что $x = -25$ — единственная критическая точка функции $y(x)$ и это точка минимума.

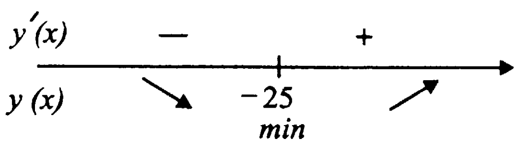


Рис. 13

Ответ: -25.

13. а) Используя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и формулу приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, преобразуем исходное уравнение к виду:

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x - 3 = 0;\ (\sqrt{2}\cos x + 1)(\sqrt{2}\cos x - 3) = 0.$$

Значит, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,$

или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Уравнение $\cos x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ корней не имеет, так как $\frac{3\sqrt{2}}{2} > 1$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 14) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

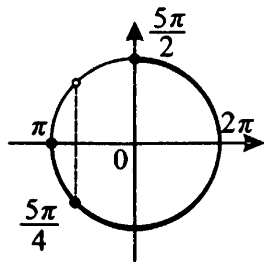


Рис. 14

Получим число $\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z;\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;$ б) $\frac{5\pi}{4}$.

14. а) Заметим, что треугольник SAB является прямоугольным, так как в нём $SB^2 = 171 = 27 + 144 = SA^2 + AB^2$. Аналогично треугольник SAD тоже является прямоугольным, поскольку $SD^2 = 52 = 27 + 25 = SA^2 + AD^2$. Получаем, что прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, а значит, перпендикулярна плоскости основания $ABCD$.

б) Отложим на прямой AD за точку D отрезок DE, равный отрезку AD (см. рис. 15). Тогда в четырёхугольнике $BCED$ стороны BC и DE равны и параллельны. Следовательно, $BCED$ является параллелограммом, поэтому $BD||CE$, и угол между SC и BD будет равен углу между SC и CE.

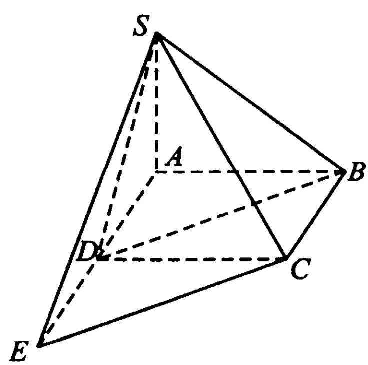


Рис. 15

По теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 144 + 25 = 169$,
$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + BD^2 = 27 + 169 = 196$,
$SE^2 = SA^2 + AE^2 = 27 + 100 = 127$.

Значит, $BD = CE = 13$, $SC = 14$, $SE = \sqrt{127}$.

Пусть $\angle SCE = \alpha$. По теореме косинусов для треугольника SCE имеем: $SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{SC^2 + CE^2 - SE^2}{2SC \cdot CE} = \frac{196 + 169 - 127}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{119}{182}.$$

Откуда $\alpha = \arccos\frac{119}{182}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{119}{182}$.

15. Пусть $t = 2^{3-x^2} - 1$, тогда неравенство примет вид:
$\frac{t^2 - 8t + 7}{t^2} \geqslant 0$, $\frac{(t-1)(t-7)}{t^2} \geqslant 0$, откуда $t < 0$; $0 < t \leqslant 1$; $t \geqslant 7$.

При $t < 0$ получим: $2^{3-x^2} - 1 < 0$; $3 - x^2 < 0$, откуда $x < -\sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$.

При $0 < t \leqslant 1$ получим: $0 < 2^{3-x^2} - 1 \leqslant 1$; $0 < 3 - x^2 \leqslant 1$, откуда $-\sqrt{3} < x \leqslant -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$.

При $t \geqslant 7$ получим: $2^{3-x^2} - 1 \geqslant 7$; $3 - x^2 \geqslant 3$, откуда $x = 0$.

Решением исходного неравенства будет
$x < -\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} < x \leqslant -\sqrt{2}$; $x = 0$; $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}]; 0; [\sqrt{2}; \sqrt{3}); (\sqrt{3}; +\infty)$.

16. а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции (см. рис. 16). Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. По свойству биссектрисы треугольника имеем: $\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D$.

б) Пусть окружность с центром в точке O_1 радиусом $R = \frac{5}{2}$ касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD — в точке M; окружность с центром в точке O_2 радиусом $r = \frac{1}{2}$ касается боковой стороны AB в точке F, а основания BC — в точке N. Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда $O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$. Так как прямая, со-

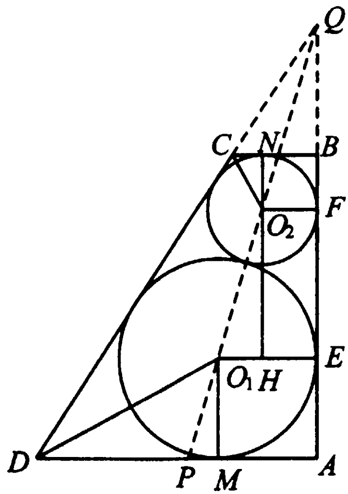


Рис. 16

единяющая центры двух окружностей, проходит через точку касания этих окружностей, то $O_1O_2 = R+r = \frac{5}{2}+\frac{1}{2} = 3$. Значит, по теореме Пифагора, $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{5}$.

Пусть $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\angle BQC = 2\alpha$, $\angle BCD = 90^\circ + 2\alpha$, $\angle O_2CN = \frac{1}{2}\angle BCD = 45^\circ + \alpha$. Из треугольника O_2CN находим:

$$NC = O_2N\operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) = O_2N\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{9-4\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно, $BC = BN + NC = \frac{1}{2} + \frac{9-4\sqrt{5}}{2} = 5 - 2\sqrt{5}$.

Аналогично, $\angle O_1DM = 45^\circ - \alpha$.

Тогда $MD = O_1M\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) = O_1M\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{45+20\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $AD = AM + MD = \frac{5}{2} + \frac{45+20\sqrt{5}}{2} = 25 + 10\sqrt{5}$.

Поскольку $AB = AE+EF+FB = R+O_2H+r = \frac{5}{2}+\sqrt{5}+\frac{1}{2} = 3+\sqrt{5}$, получаем: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB = \frac{1}{2}(30+8\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5}) = 65+27\sqrt{5}$.

Ответ: $65 + 27\sqrt{5}$.

17. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно: $10,\ \dfrac{10(n-1)}{n}, \ldots,\ \dfrac{10\cdot 2}{n},\ \dfrac{10}{n},\ 0$. По условию каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова: $12,\ \dfrac{12(n-1)}{n}, \ldots,\ \dfrac{12\cdot 2}{n},\ \dfrac{12}{n},\ 0$. Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими: $2+\dfrac{10}{n},\ \dfrac{2(n-1)+10}{n}, \ldots,\ \dfrac{4+10}{n},\ \dfrac{2+10}{n}$. Всего следует выплатить

$$10+2\cdot\left(\frac{n+(n-1)+\ldots+2+1}{n}\right) = 10+2\cdot\frac{n+1}{2} = n+11 (\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 18 млн рублей, поэтому $n = 7$.

Ответ: 7.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2 + y^2 \geqslant 16$, получаем уравнение
$x^2 + 16x + y^2 + 16y + 48 = x^2 + y^2 - 16,\ 16x + 16y = -64,\ y = -x - 4$.

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \geqslant 16$, задаёт два луча, выходящих из точек $A(-4; 0)$ и $B(0; -4)$ и расположенных на прямой $y = -x - 4$ (см. рис. 17).

2) Если $x^2 + y^2 < 16$, то получаем уравнение
$x^2 + 16x + y^2 + 16y + 48 = 16 - x^2 - y^2,\ 2x^2 + 16x + 2y^2 + 16y + 32 = 0,$
$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 4^2$.

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2 < 16$, задаёт дугу ω окружности с центром в точке $O(-4; -4)$ и радиусом 4 с концами в точках A и B (см. рис. 17).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую $y = -x + a$, параллельную прямой AB или совпадающую с ней при $a = -4$ (в этом случае система уравнений имеет бесконечное множество решений).

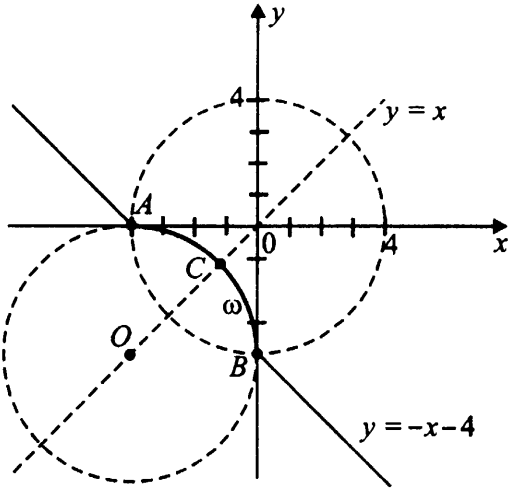


Рис. 17

Очевидно, что при $a < -4$ система уравнений решений иметь не будет.

При $a > -4$ система уравнений будет иметь больше одного решения тогда и только тогда, когда прямая $y = -x + a$ будет пересекать дугу ω в двух различных точках.

Найдём, при каком значении a прямая $y = -x + a$ касается дуги ω. Из соображений симметрии заметим, что касание будет происходит в точке C с координатами $(x_0; y_0)$, которая находится на прямой $y = x$ (см. рис. 17), откуда $x_0 = y_0$. Подставляя координаты точки $C(x_0; x_0)$ в уравнение, которое задаёт дугу ω, имеем: $(x_0 + 4)^2 + (x_0 + 4)^2 = 4^2$, $|x_0 + 4| = 2\sqrt{2}$, $x_0 = 2\sqrt{2} - 4$. $x_0 = -2\sqrt{2} - 4$ не принадлежит дуге ω.

Тогда $a = x_0 + y_0 = 2x_0 = 4\sqrt{2} - 8$.

Значит, при $-4 < a < 4\sqrt{2} - 8$ система имеет два решения, при $a = 4\sqrt{2} - 8$ система имеет одно решение, при $a > 4\sqrt{2} - 8$ система решений не имеет.

Ответ: $[-4; 4\sqrt{2} - 8)$.

19. а) Пусть первоначально на доске было 25 чисел, равных 15, и 5 чисел, равных 33. Их среднее арифметическое равно $\dfrac{25 \cdot 15 + 5 \cdot 33}{30} =$

$$= \frac{375 + 165}{30} = \frac{540}{30} = 18.$$

Среднее арифметическое получившихся чисел равно $\frac{5\cdot 16{,}5}{5} = 16{,}5 > 16$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S, а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию оказались стёрты только числа, получившиеся из 15, поэтому $\frac{S+15k}{30} = 18$. Отсюда $S = 540 - 15k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S}{2(30-k)}$. Тогда $14 < \frac{540-15k}{2(30-k)} < 15$; $840 - 28k < 540 - 15k < 900 - 30k$. Последнее двойное неравенство запишем в виде системы неравенств $\begin{cases} 840 - 28k < 540 - 15k, \\ 540 - 15k < 900 - 30k, \end{cases}$ $\begin{cases} 13k > 300, \\ 15k < 360, \end{cases}$ $\begin{cases} k > 23\frac{1}{13}, \\ k < 24. \end{cases}$ Таких целых чисел k нет.

в) Найдём наибольшее возможное значение среднего арифметического $A = \frac{540-15k}{2(30-k)}$ оставшихся чисел в зависимости от целочисленного аргумента k — первоначального количества чисел 15 на доске. Имеем: $A = \frac{540-15k}{2(30-k)} = \frac{15k-540}{2k-60} = \frac{\frac{15}{2}\cdot(2k-60) - 90}{2k-60} = \frac{15}{2} - \frac{90}{2k-60} = \frac{15}{2} + \frac{45}{30-k}$.

Число A будет наибольшим, если наибольшим будет значение аргумента k. Оценим это значение. Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 54, в конце на доске осталось $30 - k$ чисел, поэтому для суммы оставшихся чисел $S = 540 - 15k$ должно выполняться неравенство $540 - 15k \leqslant 54(30-k)$, $39k \leqslant 1080$, $k \leqslant \frac{360}{13} < 28$, $k \leqslant 27$.

Тогда $A \leqslant \frac{15}{2} + \frac{45}{30-27} = 22{,}5$.

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 22,5. Пусть первоначально на доске было написано 27 чисел, равных 15, и 3 числа, равных

45. Их среднее арифметическое было равно $\frac{27 \cdot 15 + 3 \cdot 45}{30} = 18$. Среднее арифметическое оставшихся чисел стало равно $\frac{3 \cdot 22{,}5}{3} = 22{,}5$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 22,5.

Решение варианта 9

1. Общее число детей и воспитателей в лагере равно $258+56 = 314$. В один автобус помещается 55 пассажиров. Число автобусов, необходимых для перевозки, равно $\frac{314}{55}$; $5 < \frac{314}{55} < 6$. Поэтому для перевозки всех надо минимум 6 автобусов.

Ответ: 6.

2. Из графика видно, что наименьшая удельная теплоёмкость получается при температуре около 40 °C и равна 4 180.

Ответ: 4 180.

3. Длина стороны AB равна 7, так как AB составлена из сторон клетки. Средняя линия равна половине AB, то есть 3,5.

Ответ: 3,5.

4. Чтобы полететь первым рейсом нужно попасть в число 5 туристов из 50. Значит, благоприятных исходов 5 из 50 возможных. Поэтому вероятность равна $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$.

Ответ: 0,1.

5. Так как $625 = 25 \cdot 25 = 5^2 \cdot 5^2 = 5^4$, то получаем уравнение $5^{22-3x} = 5^4$. Отсюда $22 - 3x = 4$, $3x = 18$, $x = 6$.

Ответ: 6.

6. Угол B треугольника ABC вписан в окружность и опирается на дугу в 180°. Угол B равен половине дуги, то есть 90°. Поэтому треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом B.

AC — гипотенуза, $AC = 2R = 2 \cdot 4 = 8$.

$\frac{AB}{AC} = \sin \angle C$, $\frac{AB}{8} = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $AB = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

Ответ: 4.

7. В точке максимума производная равна нулю и при переходе через неё меняет знак с плюса «+» на минус «−». Как видно из графика производной (см. рис. 18), таких точек две (O и A).

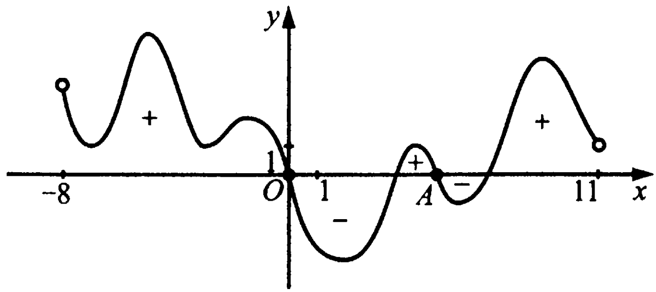


Рис. 18

Ответ: 2.

8. Рассмотрим рисунок 19.

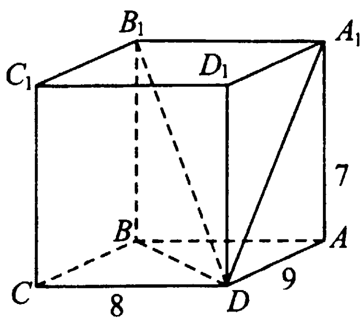


Рис. 19

Многогранник DAA_1B_1B является пирамидой, в основании которой лежит прямоугольник AA_1B_1B, а высотой является AD.

Поэтому $V_{DAA_1B_1B} = \frac{1}{3}S_{DAA_1B_1B} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 168$.

Ответ: 168.

9. $\cos(-930°) = \cos 930°$, $930° = 3 \cdot 360° - 150°$.
По формулам приведения получим: $\cos 930° = \cos 150° = \cos(180° - 30°) =$ $= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $-22\sqrt{3}\cos(-930°) = -22 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 33$.

Ответ: 33.

10. Согласно данным, указанным в задаче, получаем:

$$36 = \frac{T_1 - 352}{T_1} \cdot 100, \quad 9 = \frac{T_1 - 352}{T_1} \cdot 25, \quad 9T_1 = 25T_1 - 352 \cdot 25,$$

$16T_1 = 352 \cdot 25$, $T_1 = \dfrac{352 \cdot 25}{16} = 550$.

Ответ: 550.

11. Пусть S — расстояние между городами, тогда по условию

$\frac{1}{3}S + 100 + \frac{1}{6}S + 200 + \frac{1}{4}S + 50 = S$, $350 = S - \frac{9}{12}S = \frac{3}{12}S = \frac{1}{4}S$,
$S = 350 \cdot 4 = 1\,400$.

Ответ: 1 400.

12. Находим производную y':

$y' = (2x + 12) \cdot e^{-3-x} + (x^2 + 12x + 33) \cdot e^{-3-x} \cdot (-1)$,
$y' = e^{-3-x}(2x + 12 - x^2 - 12x - 33)$,
$y' = (-x^2 - 10x - 21)e^{-3-x} = -(x^2 + 10x + 21)e^{-3-x}$.
$y' = 0$ при $x = -7$ и $x = -3$, $e^{-3-x} > 0$.

На промежутке $(-7; 0)$ функция $y = f(x)$ имеет одну стационарную точку (см. рис. 20) $x = -3$, точку максимума, следовательно, в ней функция принимает наибольшее значение.

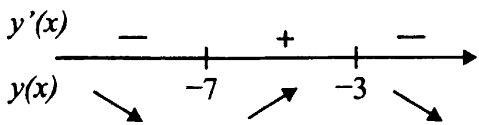


Рис. 20

$y(-3) = ((-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 33)e^{-3-(-3)} = 6$.

Ответ: 6.

13. а) Представим $4 = 4(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$.

Получим $\sin^2 2x + 3\cos^2 2x - 4\sin 2x \cdot \cos 2x = 0$.

Если $\cos^2 2x = 0$, то $\sin^2 2x = 0$, что невозможно. Поэтому $\cos^2 x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 2x$.

$\operatorname{tg}^2 2x + 3 - 4\operatorname{tg} 2x = 0$, $\operatorname{tg}^2 2x - 4\operatorname{tg} 2x + 3 = 0$.
$\operatorname{tg} 2x = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$.

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$; $2x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

2) $\operatorname{tg} 2x = 3$; $2x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$; $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

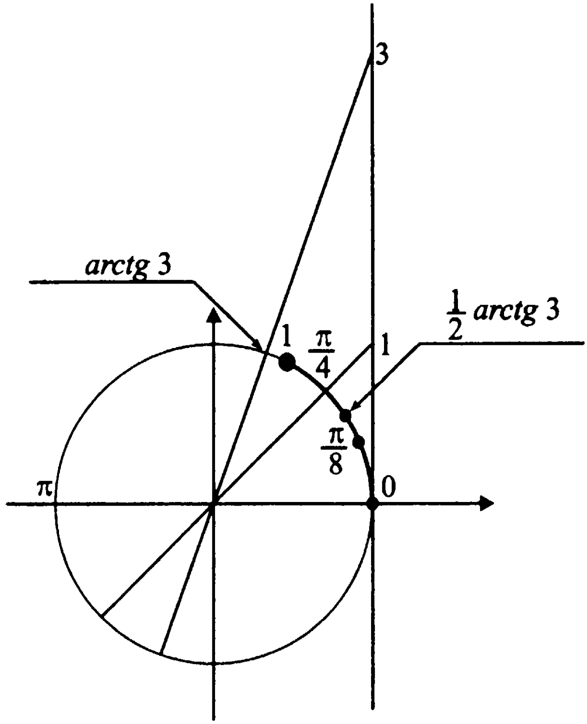


Рис. 21

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие промежутку [0; 1] (см. рис. 21).

Так как $0 < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{4} < 1$, то $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3$ является решением. $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4} < 1$, значит, $\frac{\pi}{8}$ также является решением.

Другие решения не попадут в промежуток [0; 1], так как они получаются из чисел $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3$ и $\frac{\pi}{8}$ прибавлением чисел, кратных $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; $\frac{\operatorname{arctg} 3}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$; б) $\frac{\pi}{8}, \frac{\operatorname{arctg} 3}{2}$.

14. а) Прямая MN лежит в плоскости (MNN_1), (M_1P_1) пересекает (MNN_1) в точке M_1, и тогда по признаку скрещивающихся прямых MN и M_1P_1 — скрещивающиеся прямые (см. рис. 22).

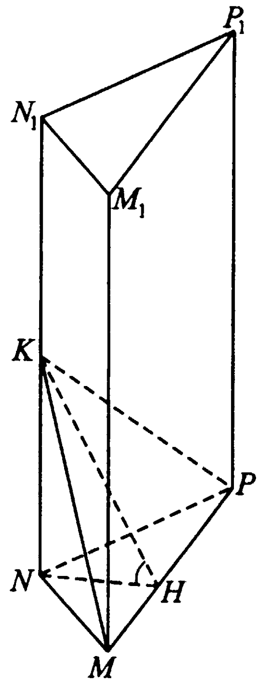


Рис. 22

Плоскости MNP и $M_1N_1P_1$ параллельны как основания призмы. По условию призма прямая, значит, каждое боковое ребро перпендикулярно основаниям, следовательно, является расстоянием между скрещивающимися прямыми MN и M_1P_1, что и требовалось доказать.

б) Проведём $NH \perp MP$, тогда NH — высота и медиана в равнобедренном $\triangle MNP$. KH — медиана $\triangle MKP$. NH — проекция KH на (MPN) и $NH \perp MP$. Следовательно, $KH \perp MP$ (по теореме о трёх перпендикулярах).

$\angle KHN$ — линейный угол двугранного угла $KMPN$, откуда $\angle KHN = 60°$.

В $\triangle KPH$ катет $KH = \sqrt{KP^2 - PH^2} = \sqrt{81 - 27} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Из $\triangle KNH$ катет $KN = KH \cdot \sin 60° = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

По условию $NK : N_1K = 3 : 4$. $N_1K = \frac{4}{3}NK$, $N_1K = 6\sqrt{2}$.

$$NN_1 = NK + N_1K = \frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{21\sqrt{2}}{2}$.

15. ОДЗ:

$$\begin{cases} 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1, \\ x + 5 > 0, \\ 4 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5, \\ x \neq 4, \\ x > -5, \\ x < 4, \\ x > -4, \\ x \neq -3; \end{cases} \quad (-4; -3) \cup (-3; 4).$$

На ОДЗ знак $\log_a b$ совпадает со знаком $(a - 1)(b - 1)$, поэтому исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $(5 - x - 1)(x + 5 - 1)(x + 4 - 1)(4 - x - 1) \leqslant 0$.
$(4 - x)(x + 4)(x + 3)(3 - x) \leqslant 0$ (см. рис. 23).

$\Rightarrow x \in [-4; -3] \cup [3; 4]$.

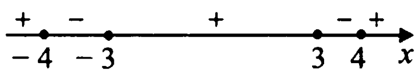


Рис. 23

С учётом ОДЗ получаем: $x \in (-4; -3) \cup [3; 4)$.
Ответ: $(-4; -3) \cup [3; 4)$.

16. Не нарушая общности, можно рассмотреть одну из возможных конфигураций (см. рис. 24).

а) Высота $\triangle ABF$ $BK \perp AF \Rightarrow \triangle ABF$ и $\triangle FBK$ — прямоугольные, они подобны (по общему углу F).

б) Проведём $MN \perp AD$. Тогда MN — расстояние от точки M до прямой AD.

$\triangle ABF$, $\triangle MNF$, $\triangle CDF$ — прямоугольные, их острый угол F — общий, значит, они подобны.

$$\triangle MNF \sim \triangle ABF \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{FM}{FA}, MN = \frac{FM \cdot AB}{FA}.$$

$$\triangle MNF \sim \triangle DCF \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{FM}{FD}, \ MN = \frac{FM \cdot CD}{FD}.$$

Тогда получим $MN^2 = \dfrac{FM \cdot AB \cdot FM \cdot CD}{FA \cdot FD} = \dfrac{FM^2 \cdot AB \cdot CD}{FA \cdot FD}$.

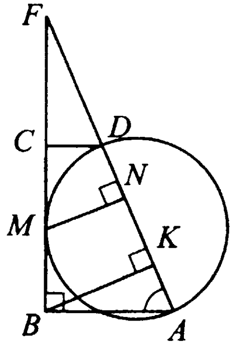


Рис. 24

По теореме о секущей и касательной имеем:
$FM^2 = AF \cdot FD$, тогда $MN^2 = AB \cdot CD = 20$.

$MN = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

17. Пусть вклад лежал под 5 % годовых p лет и k лет вклад лежал под 10 % годовых. Тогда после $p+k$ лет вклад составил $96\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^p$. Пролежав ещё год, вклад достиг $96\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^p \cdot 1{,}25 = 120\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^p$, при этом общий срок хранения равен $(k + p + 1)$ лет.

Составим уравнение:

$120\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^p = 160\,083$.

Домножив обе части на $10^k \cdot 100^p$, получим:

$120\,000 \cdot 11^k \cdot 105^p = 160\,083 \cdot 10^k \cdot 100^p$,

$40\,000 \cdot 11^k \cdot 105^p = 53\,361 \cdot 10^k \cdot 100^p$,

$40\,000 \cdot 11^k \cdot 3^p \cdot 5^p \cdot 7^p = 53\,361 \cdot 10^k \cdot 100^p$,

$40\,000 \cdot 11^k \cdot 3^p \cdot 5^p \cdot 7^p = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 10^k \cdot 100^p$. (1)

Проверим равенство (1) при $p = 2$ и $k = 2$.

$40\,000 \cdot 25 = 1\,000\,000$.

$1\,000\,000 = 1\,000\,000$ — равенство верно.

Число каждого из множителей 3, 7 и 11 в правой части равенства равно 2, значит, $p = 2$ и $k = 2$, при этом равенство верно.

Общее количество лет: $k + p + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$.

Ответ: 5.

18. Область определения исходной функции задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ или } a > 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_a x > 0, \\ \sqrt{x}\log_a 5 - \sqrt{a}\log_a 5 - x^{\frac{1}{2}} x^{\log_x(\log_a x)} + \sqrt{a}\log_a x > 0. \end{cases}$$

Преобразуем последнее неравенство

$\log_a 5(\sqrt{x} - \sqrt{a}) - \sqrt{x}\log_a x + \sqrt{a}\log_a x > 0,$

$(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\log_a 5 - \log_a x) > 0,\ (x - a)(x - 5)(a - 1) < 0.\ (1)$

Если $0 < a < 1$, то $a - 1 < 0$.

Неравенство (1) примет вид $(x-a)(x-5) > 0$, где $x \in (0; a)\cup(5; +\infty)$, при этом при $x > 5$ условие $\log_a x > 0$ нарушено для всех значений x, а на промежутке $(0; a)$ нет целых чисел.

Если $a > 1$, то $(a - 1) > 0$.

Неравенство (1) примет вид $(x - a)(x - 5) < 0$.

а) При $1 < a \leqslant 5$ целых корней на промежутке $(a; 5)$ не больше 3.

б) Если $a > 5$, то $x \in (5; a)$ и 4 целых корня будет при $a \in (9; 10]$, так как в промежуток $(5; a)$ должны войти целые числа 6, 7, 8 и 9, а 10 войти не должно.

Ответ: $(9; 10]$.

19. а) Если бы кресла стояли в ряд, то первое кресло можно было бы выбрать шестью способами, второе — пятью, третье — четырьмя. Всего было бы $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ способов.

Однако за счёт поворота каждый способ при таком подсчёте считается пять раз, то есть $\frac{720}{5} = 144$ способа.

б) Если представлены кресла четырёх видов, то три вида представлены одним креслом, а один вид — двумя. Один вид, представленный двумя креслами, мы можем выбрать шестью способами. Затем из пяти оставшихся выбираем три вида, это можно сделать таким же числом способов, каким можно выбрать два неиспользуемых вида из пяти, то есть $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами.

Значит, существует 60 способов выбрать один вид, представленный двумя креслами, и три вида, представленные одним креслом.

Пусть описанный выше выбор сделан, и у нас уже отобрано 5 кресел. Сначала расставим их в ряд, считая различными. Получим

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов. Теперь учтём то, что один вид повторяется дважды. Получим: $\frac{120}{2} = 60$ способов. Наконец, учтём повороты и получим: $\frac{60}{5} = 12$ способов. Значит, всего $60 \cdot 12 = 720$ способов.

в) Возможны 3 случая.

1) Все кресла различны. Тогда соответствующих способов — 144 (см. пункт а).

2) Три вида представлены одним креслом, а один вид — двумя. Таких способов — 720 (см. пункт б).

3) Один вид кресел представлен на карусели одним креслом, а двум видам соответствует по два кресла. Выбрать один вид, а затем два других можно 60 способами (не учитывая порядок выбора двух последних).

Если бы 5 кресел были различными, то их можно было бы расставить в ряд $5! = 120$ способами. Учитывая повторяющиеся кресла, получим: $\frac{120}{2 \cdot 2} = 30$ способов, а учитывая повороты — $\frac{30}{5} = 6$ способов. Всего в этом случае $6 \cdot 60 = 360$ способов.

Общее число способов равно $720 + 360 + 144 = 1224$.

Ответ: а) 144; б) 720; в) 1224.

Решение варианта 13

1. Так как налог на доходы составляет 13 % от заработной платы, то Александру Валентиновичу останется 100 % – 13 % = 87 % заработной платы.

Найдём эту сумму $22\,800 \cdot 87 : 100 = 19\,836$ (руб.).

Ответ: 19 836.

2. Используя диаграмму, найдём количество месяцев, когда средемесячная температура ниже 10 °C, это январь, февраль, март, октябрь, ноябрь, декабрь. То есть берём месяцы ниже прямой, проходящей через точку (+10 °C) и параллельно прямой с обозначением месяцев. Их 6.

Ответ: 6.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны (см. рис. 25).

$AB + CD = BC + AD$.

$29 + 28 = 27 + AD$, $AD = 30$.

Ответ: 30.

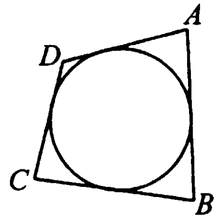


Рис. 25

4. Пусть событие A означает, что школьнику на экзамене достался вопрос по теме «Проза XIX века», событие B — вопрос по теме «Проза XX века». По условию $P(A) = 0{,}28$, $P(B) = 0{,}15$ и события A и B несовместны. Искомая вероятность равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}28 + 0{,}15 = 0{,}43$.

Ответ: 0,43.

5. $4^{x-16} = \frac{1}{64}$, $4^{x-16} = 4^{-3}$, $x - 16 = -3$, $x = 13$.

Ответ: 13.

6. Дуга AC составляет $\frac{1}{4}$ дуги окружности и равна 90° (см. рис. 26).

$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC = 45°$.

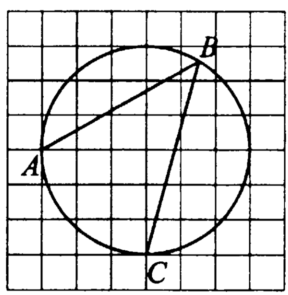


Рис. 26

Ответ: 45.

7. На рисунке 27 изображён график производной, определённой на интервале $(-7; 10)$. $f'(x) < 0$ на промежутке от 2 до 9, то есть промежуток убывания функции будет от 2 до 9 и его длина равна 7.

Ответ: 7.

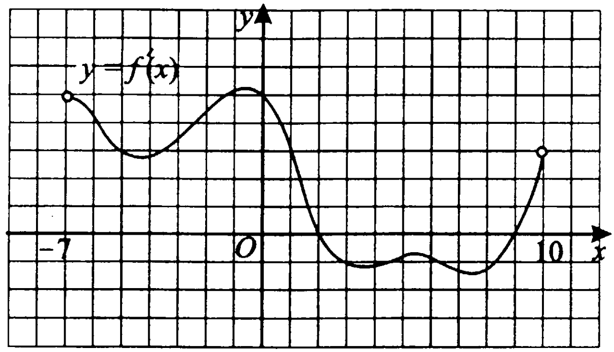


Рис. 27

8. Данный многогранник состоит из четырёх многогранников, и объём данного многогранника состоит из суммы объёмов четырёх многогранников.

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

Первый многогранник — его измерения $12 - 8 = 4$; 3; $10 - 5 = 5$.

Второй многогранник — 8; 3; 5. Третий многогранник — 8; 4; 5.

Четвёртый многогранник — 8; 3; 5.

$V = 4 \cdot 3 \cdot 5 + 8 \cdot 3 \cdot 5 + 8 \cdot 4 \cdot 5 + 8 \cdot 3 \cdot 5 = 60 + 120 + 160 + 120 = 460.$

Ответ: 460.

9. $\cos\beta = -\frac{4\sqrt{17}}{17}, \beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin\beta < 0$.

$$\sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - \frac{16 \cdot 17}{17^2}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{\sqrt{17}}{17}}{-\frac{4\sqrt{17}}{17}} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

10. $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф, $R = 10^7$ Ом, $U_0 = 32$ кВ, $\alpha = 0{,}7$.

$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}, t \geqslant 42.$

Подставим все данные в формулу.

$0{,}7 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \log_2 \frac{32}{U} \geqslant 42,\ 21 \cdot \log_2 \frac{32}{U} \geqslant 42,$

$\log_2 \frac{32}{U} \geqslant 2,\ \frac{32}{U} \geqslant 4,\ U \leqslant 8.$

Значит, наименьшее возможное напряжение на конденсаторе равно 8.
Ответ: 8.

11. Первая фирма — $150 \cdot 20 : 100 = 30$ (млн руб.).
Вторая фирма — 22,5 (млн руб.).
Третья фирма — $0{,}3 \cdot 150 = 45$ (млн руб.).
Четвёртая фирма — $150 - (30 + 22, + 45) = 52{,}5$ (млн руб.).

Часть от уставного капитала, который составляет взнос четвёртой фирмы, — $\frac{52{,}5}{150} = 0{,}35$.

Найдём сумму от прибыли, причитающуюся четвёртой фирме.
$100 \cdot 0{,}35 = 35$ (млн руб.).
Ответ: 35.

12. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 5x + 24$ (см. рис. 28).

$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 5,\ y' = x^{\frac{1}{2}} - 5,\ y' = 0,\ x^{\frac{1}{2}} = 5,\ x = 25.$

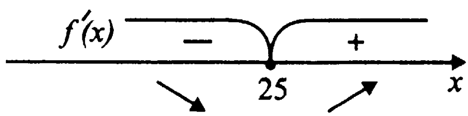


Рис. 28

При переходе через точку $x = 25$ производная меняет знак с «−» на «+», $x = 25$ — точка минимума.
Ответ: 25.

13. а) Рассмотрим два случая:

1) $\sin x > 0$, тогда $|\sin x| = \sin x$ и уравнение примет вид $2\cos x = 3$, или $\cos x = \frac{3}{2}$. Уравнение не имеет корней, так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

2) $\sin x < 0$, тогда $|\sin x| = -\sin x$ и уравнение примет вид $2\cos x = 1$, или $\cos x = \frac{1}{2}$. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. Учитывая условие $\sin x < 0$, получим:

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 8]$.

3,14 < π < 3,15, следовательно, $-\pi < -3,14$, то есть $-\frac{\pi}{3} < -1$.

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} < 8$, следовательно, $\frac{5\pi}{3} \in [-1;; 8]$.

$-\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} > 8$.

Получили число $\frac{5\pi}{3}$ — единственный корень на рассматриваемом промежутке.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) $\frac{5\pi}{3}$.

14. а) В плоскости грани AA_1B_1B через точку A проведём прямую, параллельную A_1B. Q и K — точки пересечения этой прямой соответственно с прямыми A_1B_1 и BB_1 (см. рис. 29).

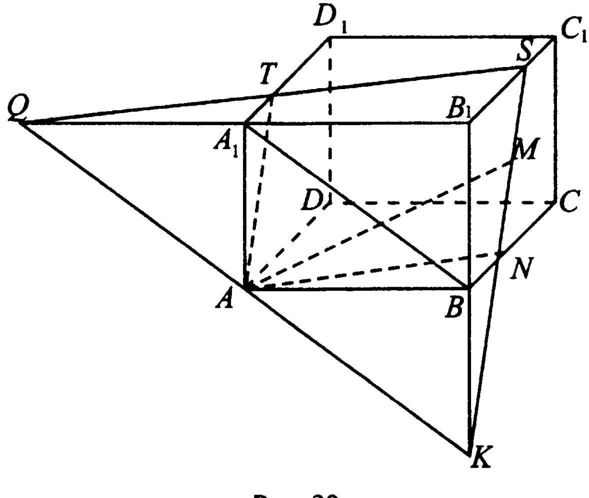


Рис. 29

Прямая KM пересекает ребро BC в точке N, а ребро B_1C_1 — в точке S. Отрезок SQ пересекает ребро A_1D_1 в точке T.

Четырёхугольник $ATSN$ образуют искомое сечение, так как все его вершины лежат в плоскости QSK, которая проходит через AM и прямую AK, параллельную A_1B, и, следовательно, $(QSK) \parallel A_1B$.

б) 1) В плоскости грани AA_1B_1B построим отрезок $AK \parallel A_1B$. $A_1B \parallel (AMK)$, $AK = A_1B$ (см. рис. 30).

2) В плоскости BCC_1 проведём $BR \perp MK$, тогда по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, $AR \perp MK$ как наклонная к плоскости BCC_1, проекция которой $BR \perp MK$ по построению.

3) Плоскость $ABR \perp MK$, следовательно, любая прямая плоскости ABR перпендикулярна прямой MK.

4) Проведём отрезок $BH \perp AR$. Длина этого отрезка — искомое расстояние.

Действительно, отрезок BH перпендикулярен двум пересекающимся прямым (AR и MK) плоскости AMK, параллельной A_1B.

5) Из $\triangle MBK$ найдём высоту BR (см. рис. 31):

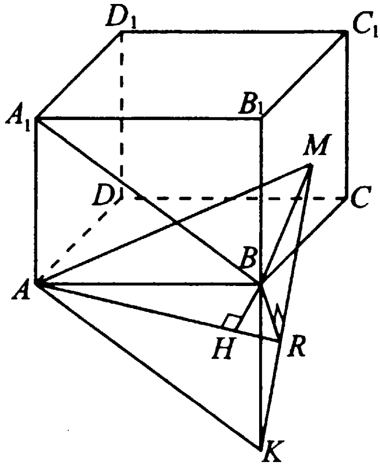


Рис. 30

$MB = 2\sqrt{2}$, $BK = 4$, $\angle MBK = 135°$. По теореме косинусов

$$MK = \sqrt{MB^2 + KB^2 - 2MB \cdot KB \cdot \cos 135°} =$$

$$= \sqrt{8 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2\sqrt{10}.$$

$$S_{MBK} = \frac{1}{2} MB \cdot BK \cdot \sin 135° = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,$$

$$S_{MBK} = \frac{1}{2} MK \cdot BR = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot BR = BR \cdot \sqrt{10}.$$

$\sqrt{10} \cdot BR = 4$, откуда $BR = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Из прямоугольного треугольника ABR высоту BH найдём из условия $AB \cdot BR = AR \cdot BH$.

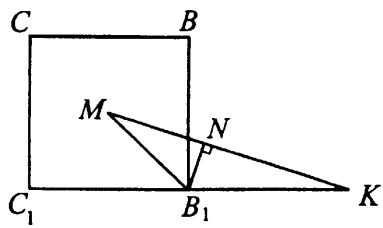


Рис. 31

По теореме Пифагора из $\triangle ABR$ $AR = \sqrt{AB^2 + BR^2} = \sqrt{\frac{88}{5}}$, тогда $4 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{5} = \sqrt{\frac{88}{5}} \cdot BH$, $BH = \frac{4\sqrt{11}}{11}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{11}}{11}$.

15. ОДЗ: $\begin{cases} 2x + 1 \neq 0, \\ -x > 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -\frac{1}{2}, \\ x < 0; \\ x > -2. \end{cases}$

$-2 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < 0$. Данное неравенство для всех x из ОДЗ равносильно неравенству $\log_2 \frac{x+2}{4} > -\frac{3}{2x+1}$.

Решим последнее неравенство на каждом из промежутков ОДЗ.

1) $-2 < x < -\frac{1}{2}$. Оценим левую и правую части неравенства:

$\log_2 \frac{x+2}{4} < \log_2 \frac{3}{8} < 0$, $-\frac{3}{2x+1} > 0$.

Так как для всех x из промежутка $(-2; -\frac{1}{2})$ выполняются неравенства $\log_2 \frac{x+2}{4} < 0 < -\frac{3}{2x+1}$, то неравенство $\log_2 \frac{x+2}{4} > -\frac{3}{2x+1}$, а следовательно, и исходное неравенство на промежутке $(-2; -\frac{1}{2})$ не имеет решений.

2) Если $-\frac{1}{2} < x < 0$, то выполняются неравенства

$$\log_2 \frac{x+2}{4} > \log_2 \frac{3}{8} > \log_2 \frac{1}{4} > -2.$$

$-\frac{3}{2x+1} < -3$, так как $0 < 2x+1 < 1$. Значит, любое значение из промежутка $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ является решением неравенства $\log_2 \frac{x+2}{4} > -\frac{3}{2x+1}$, а следовательно, и исходного неравенства.

Итак, множеством решений исходного неравенства является промежуток $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

16. Точка O равноудалена от точек A и B, значит, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то есть O принадлежит прямой MN (см. рис. 32).

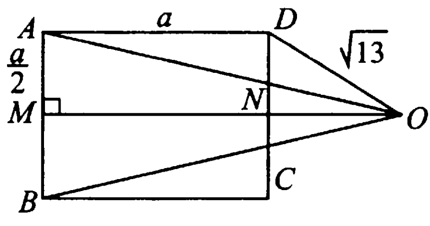


Рис. 32

а) Площадь квадрата не может быть больше либо равна 36, так как тогда сторона квадрата была бы больше либо равна 6, что невозможно. Действительно, в прямоугольном треугольнике катет всегда меньше гипотенузы, поэтому в прямоугольном треугольнике AOM верны соотношения $MO = MN + NO < AO$, откуда $MN < AO$, а так как $MN = AB$, то и $AB < AO$, $AB \geqslant 6$, $AB < 5 = AO$. Тогда $6 < 5$, что неверно.

б) Введём обозначения: $AD = a$, $ON = x$,

тогда $AM = MB = DN = \frac{a}{2}$, $MO = a + x$. Применяя дважды теорему Пифагора для $\triangle AMO$ и $\triangle DNO$, получим систему

$$\begin{cases} (a+x)^2 + \dfrac{a^2}{4} = 25, \\ x^2 + \dfrac{a^2}{4} = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 2ax + x^2 + \dfrac{a^2}{4} = 25, \\ x^2 + \dfrac{a^2}{4} = 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ax - 12 = 0, \\ x^2 + \dfrac{a^2}{4} = 13; \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим x и подставим во второе: $x = \dfrac{12 - a^2}{2a}$, $\left(\dfrac{12 - a^2}{2a}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4} = 13$. Выполнив тождественные преобразования, получим биквадратное уравнение $a^4 - 38a^2 + 72 = 0$, откуда $a^2 = 36$ или $a^2 = 2$. Итак, площадь квадрата $ABCD$ равна 2.

Ответ: 2.

17. Внесём данные в таблицу.

Отделение банка	**Число клиентов**	**Корпоративные клиенты**		**Бюджетные организации**		**Частные клиенты**	
		%	**Число клиентов**	%	**Число клиентов**	%	**Число клиентов**
I	x			45	$0{,}45x$	55	$0{,}55x$
II	y	10	$0{,}1y$	40	$0{,}4y$	50	$0{,}5y$
III	z	30	$0{,}3z$			70	$0{,}7z$
После объединения	$x+y+z$	15	$0{,}1y + 0{,}3z$ или $0{,}15(x+y+z)$		$0{,}45x+0{,}4y$	?	$0{,}55x+0{,}5y+$ $+0{,}7z$

Число корпоративных клиентов до объединения отделений банков и после одно и то же, поэтому можно составить уравнение $0,1y+0,3z = 0,15(x+y+z)$, откуда $z = \dfrac{y+3x}{3}$. После объединения отделений банка доля частных клиентов стала равна $A = \dfrac{0{,}55x + 0{,}5y + 0{,}7z}{x+y+z}$.

Тогда $A = \dfrac{0{,}55x + 0,5y + 0,7 \cdot \dfrac{y+3x}{3}}{x + y + \dfrac{y+3x}{3}} = \dfrac{55x + 50y + 70 \cdot \dfrac{y+3x}{3}}{100\left(x + y + \dfrac{y+3x}{3}\right)} =$

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{11x + 10y + 14 \cdot \dfrac{y+3x}{3}}{x + y + \dfrac{y+3x}{3}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{75x + 44y}{6x + 4y} = \frac{1}{20} \cdot \frac{75 + 44 \cdot \dfrac{y}{x}}{6 + 4\dfrac{y}{x}} =$$

$$\frac{1}{20}\left(\frac{66 + 44\dfrac{y}{x}}{6 + 4\dfrac{y}{x}} + \frac{9}{4\dfrac{y}{x} + 6}\right) = \frac{1}{20} \cdot \left(11 + \frac{9}{4\dfrac{y}{x} + 6}\right).$$

Ясно, что $\frac{y}{x} > 0$ (по условию $x > 0$, $y > 0$), при этом $\frac{y}{x}$ может принимать любые рациональные значения, большие 0).

$$4 \cdot \frac{y}{x} + 6 > 6,\ 0 < \frac{1}{6 + 4 \cdot \dfrac{y}{x}} < \frac{1}{6}.$$

$$11 < 11 + \frac{9}{4\dfrac{y}{x} + 6} < 11 + \frac{9}{6} = 12{,}5.$$

Значит, процент, который могут составлять частные клиенты, то есть $A \cdot 100\%$, удовлетворяет двойному неравенству.

$$\frac{1}{20} \cdot 11 \cdot 100\,\% < A \cdot 100\,\% < \frac{1}{20} \cdot 12{,}5 \cdot 100\,\%.$$

$55\,\% < A \cdot 100\,\% < 62{,}5\,\%$.

Ответ: $(55\,\%; 62{,}5\,\%)$.

18. Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ — решение системы, то пары $(-x_0; -y_0)$, $(y_0; x_0)$, $(-y_0; -x_0)$ также являются решениями этой системы. Пары $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ различны, так как в противном случае пара $(0; 0)$ была бы решением системы, а это не так (иначе из первого уравнения $2a = 0$, $a = 0$, и второе уравнение не обращается в верное равенство при $x = y = 0$). Рассуждая аналогично, получим, что пары $(y_0; x_0)$ и $(-y_0; -x_0)$ тоже различны.

Система имеет два решения, если совпадают пары $(x_0; y_0)$ и $(y_0; x_0)$ или совпадают пары $(x_0; y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$, то есть либо выполняется равенство $x_0 = y_0$, либо выполняется равенство $x_0 = -y_0$.

Если $x_0 = y_0$, то исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 2y_0^2 = 2a, \\ y_0^2 = a - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Эта система несовместна, так как равенство $a = a - \dfrac{1}{2}$ неверно.

Если $x_0 = -y_0$, то исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 2y_0^2 = 2a, \\ -y_0^2 = a - \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{ откуда находим } a = \frac{1}{2} - a;\ a = \frac{1}{4}.$$

При $a = \dfrac{1}{4}$ исходная система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}, \\ xy = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 2 и складывая результат с первым уравнением системы, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}, \\ (x+y)^2 = 0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} 2x^2 = \dfrac{1}{2}, \\ x = -y. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, значит, действительно, $a = \dfrac{1}{4}$ — единственное значение параметра, при котором система имеет ровно два решения.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

19. а) Наименьшее общее кратное чисел данного набора равно $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Запишем все возможные делители числа 330:

1; 2; 3; 5; 6; 10; 11; 15; 22; 30; 33; 55; 66; 110; 165; 330.

Заметим, что единицы среди чисел данного набора нет, так как по условию для любых двух данных чисел их наибольший общий делитель больше единицы.

Предположим, что 2 принадлежит данному набору чисел, тогда каждое другое число из данного набора чисел, а следовательно, и их сумма чётное, так как наибольший общий делитель для любых двух чисел больше единицы. Но, по условию, сумма равна 755. Значит, число 2 не принадлежит данному набору чисел.

Если предположить, что число 3 принадлежит данному набору чисел, то остальные числа набора, а следовательно, и их сумма делятся на 3. Но 755 не делится на 3, следовательно, 3 не содержится среди данных чисел.

б) Предположим, что 10 принадлежит данному набору чисел. Тогда он не может содержать числа 11 и 33, так как их общий делитель с числом 10 равен 1.

Тогда остаётся 10 чисел (не считая числа 10), из которых надо составить требуемый набор — это числа 5, 6, 15, 22, 30, 55, 66, 110, 165, 330. Если число 5 входит в набор, то набор состоит из чисел, кратных 5: 5, 10, 15, 30, 55, 110, 165, 330 (8 чисел, значит, ни одно нельзя исключить). Сумма чисел этого набора равна $720 \neq 755$. Таким образом, число 5 в набор не входит.

Ясно, что из чисел 15 и 22 в набор может входить только одно, равно как из чисел 6 и 55.

Предположим, не входят 15 и 6. Тогда набор: 10, 22, 30, 55, 66, 110, 165, 330; сумма чисел набора равна $788 \neq 755$.

Предположим, не входят 15 и 55. Тогда набор: 6, 10, 22, 30, 66, 110, 165, 330; сумма чисел набора равна $739 \neq 755$.

Предположим, не входят 22 и 6. Тогда набор: 10, 15, 30, 55, 66, 110, 165, 330; сумма чисел набора равна $781 \neq 755$.

Наконец предположим, что не входят 22 и 55. Тогда набор: 6: 10, 15, 30, 66, 110, 165, 330; сумма чисел набора равна $732 \neq 755$.

Таким образом, 10 не входит в данный набор.

в) Из предыдущих пунктов следует, что числа 1, 2, 3, 5, 10 не входят в данный набор. Если в набор входит число 11, то набор: 11, 22, 33, 55, 66, 110, 165, 330, сумма его чисел делится на 11, а 755 — нет. Значит, набор не содержит числа 11. Из чисел 15 и 22 в набор входит не более одного числа, как и из пары $(6, 55)$. Поочерёдно исключая пары $(15; 6)$, $(15; 55)$, $(22; 6)$, $(22; 55)$, найдём, что единственный подходящий набор состоит из чисел 6, 15, 30, 33, 66, 110, 165, 330.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 6, 15, 30, 33, 66, 110, 165; 330.

Решение варианта 17

1. По условию $100\,\% - 80\,\% = 20\,\%$ жителей интересуются футболом. Это составляет $\frac{20\,\%}{100\,\%} \cdot 60\,000 = 0{,}2 \cdot 60\,000 = 12\,000$ человек. Из них $70\,\%$ смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов, что составляет $\frac{70\,\%}{100\,\%} \cdot 12\,000 = 0{,}7 \cdot 12\,000 = 8\,400$.

Ответ: 8 400.

2. По графику видно, что наибольшая температура воздуха была примерно 25 декабря и составляла 4 °C, а наименьшая была примерно 17 декабря и составляла -10 °C. Тогда разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за этот период равна $4-(-10) = 4+10 = 14$ градусов.

Ответ: 14.

3. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $\triangle AOB = \triangle DOC$ по стороне и двум прилегающим углам (см. рис. 33). Тогда $\triangle AOD$ равнобедренный. Так как он ещё и прямоугольный, то $\angle ADO = 45°$. Пусть BH — высота трапеции $ABCD$. Тогда в прямоугольном $\triangle BHD$ углы при гипотенузе BD равны по $45°$. Значит, $\triangle BHD$ также равнобедренный, то есть $DH = BH = 47$.

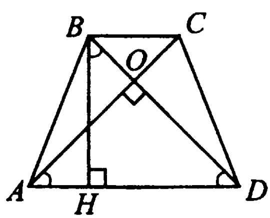


Рис. 33

В равнобедренной трапеции $DH = BC + AH = BC + \frac{AD - BC}{2} =$
$= \frac{2BC + AD - BC}{2} = \frac{BC + AD}{2}$. Но $DH = 47$, значит, средняя линия трапеции равна $\frac{BC + AD}{2} = 47$.

Ответ: 47.

4. Сломавшаяся часовая стрелка может остановиться в любом из двенадцати равных секторов циферблата (секторов между соседними числами на циферблате). Событие, вероятность которого требуется найти, наступит, если часовая стрелка остановится в одном из трёх секторов (сектора, которые расположены на циферблате между цифрами 4 и 5, 5 и 6, 6 и 7). Значит, искомая вероятность равна $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

5. $3^{39-7x} = 81$; $3^{39-7x} = 3^4$; $39 - 7x = 4$; $-7x = 4 - 39$; $-7x = -35$; $x = 5$.

Ответ: 5.

6. Пусть CH — высота трапеции $ABCD$ (см. рис. 34). Тогда в прямоугольном $\triangle CHD$ острый $\angle CDH = 45°$. Значит, этот треугольник равнобедренный, то есть $CH = DH = AD - BC = 8 - 4 = 4$.

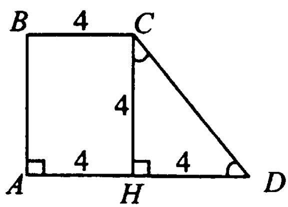


Рис. 34

Тогда $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{8 + 4}{2} \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24.

7. Если касательная параллельна прямой $y = 3x - 3$ или совпадает с ней, то её угловой коэффициент равен угловому коэффициенту прямой, то есть 3. Согласно геометрическому смыслу производной это означает, что $f'(x_0) = 3$, где x_0 — искомая абсцисса точки касания. Из данного графика производной $y = f'(x)$ видно, что $x_0 = 2$ (см. рис. 35).

Ответ: 2.

8. Пусть $V_в$ — объём воды в призме, $V_д$ — искомый объём детали. По условию $V_в = 14S$, $V_в + V_д = 18S$, где S — площадь основания призмы. Так как $V_в = 14S = 357$, то $S = \frac{357}{14} = \frac{51}{2}$ (см^2).

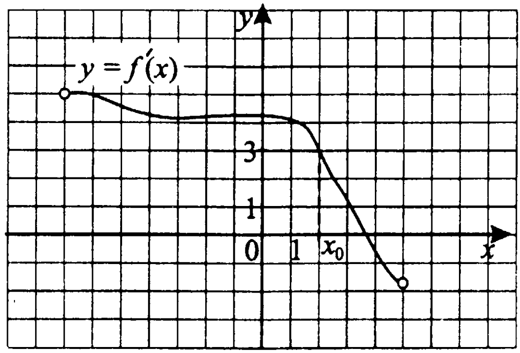


Рис. 35

Тогда $V_д = (V_в + V_д) - V_в = 18S - 14S = 4S = 4 \cdot \frac{51}{2} = 2 \cdot 51 = 102$ (см^3).

Ответ: 102.

9. $\frac{16x^2 - 25}{4x - 5} - 4x + 1 = \frac{(4x - 5)(4x + 5)}{4x - 5} - 4x + 1 = 4x + 5 - 4x + 1 = 6.$

Ответ: 6.

10. $f \geqslant 270$; $f_0 \frac{c + u}{c - v} \geqslant 270$; $250 \cdot \frac{c + 20}{c - 5} \geqslant 270$; $c + 20 \geqslant \frac{27}{25}(c - 5)$ при $c > 5$; $\left(\frac{27}{25} - 1\right)c \leqslant 20 + 5 \cdot \frac{27}{25}$; $c \leqslant \left(20 + \frac{27}{5}\right) \cdot \frac{25}{2} = \frac{127 \cdot 5}{2}$; $c \leqslant 317{,}5$. Значит, максимальная скорость распространения сигнала в среде $c = 317{,}5$ (м/с).

Ответ: 317,5.

11. Пусть x (км/ч) — скорость мотоциклиста на пути из A в B. Тогда расстояние от A до B он проехал за $\frac{180}{x}$ часов. На путь от B до A он затратил $\frac{180}{x - 10} + \frac{24}{60}$ часов, учитывая остановку на 24 минуты. Так как на путь из B в A он затратил на 1 час больше, чем потратил на дорогу из A в B, то получим уравнение $\frac{180}{x} + 1 = \frac{180}{x - 10} + \frac{24}{60}$, $x > 10$.

Решение полученного уравнения: $\dfrac{180}{x} + 1 = \dfrac{180}{x-10} + \dfrac{2}{5}$;

$\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{x-10} + \dfrac{3}{5} = 0$; $\dfrac{180 \cdot 5(x-10) - 180 \cdot 5x + 3x(x-10)}{5x(x-10)} = 0$;

$3x^2 - 30x - 180 \cdot 50 = 0, x > 10$; $x^2 - 10x - 60 \cdot 50 = 0$.

По теореме, обратной теореме Виета, корни уравнения $x_1 = -50$ и $x_2 = 60$. Так как $x > 10$, то $x = 60$.

Ответ: 60.

12. Найдём точки экстремума функции $y = -\dfrac{x^2 + 19600}{x}$.

$y' = -\dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 19600) \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{x^2 - 19600}{x^2} = -\dfrac{(x-140)(x+140)}{x^2}$.

Из рисунка 36 видно, что $x = 140$ — точка максимума заданной функции.

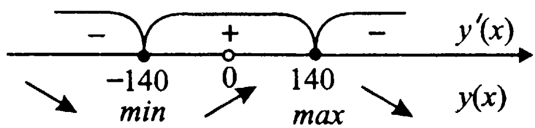


Рис. 36

Ответ: 140.

13. а) $0{,}5 \sin^2 6x - \sin^2(\frac{3\pi}{2} - 3x) = 0$,

$2\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x - \cos^2 3x = 0$, $\cos^2 3x(2\sin^2 3x - 1) = 0$.

1) $\cos^2 3x = 0, \cos 3x = 0, 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in Z)$.

2) $2\sin^2 3x - 1 = 0, 2\sin^2 3x = 1, \sin 3x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$3x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}$ $(m \in Z)$, $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{6}$ $(m \in Z)$.

б) Решим неравенство $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ для серии $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$:

$0 < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3} < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{3} < \dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2} < k < 1$, $k = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Решим неравенство $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ для серии $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{6}$, $m \in Z$;

$$0 < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6} < \frac{\pi}{2},\ -\frac{1}{12} < \frac{m}{6} < \frac{5}{12},\ -\frac{1}{2} < m < \frac{5}{2},$$

$m = 0, 1, 2.$

При $m = 0$ получим $x = \frac{\pi}{12}$, при $m = 1$ получим $x = \frac{\pi}{4}$, при $m = 2$ получим $x = \frac{5\pi}{12}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}, k, m, \in Z$;

б) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}$.

14. а) На основании условия рассмотрим чертёж (см. рис. 37), где SO — высота пирамиды, PT — средняя линия треугольника ABD, E — середина SO, $\angle SAC = 45°$, O_1 — середина AO.

$PT \parallel BD$ (как средняя линия ΔABD), поэтому $PT \parallel SBD$. Значит, α пересекает плоскость SBD по прямой параллельной PT (а значит, и BD), проходящей через точку E.

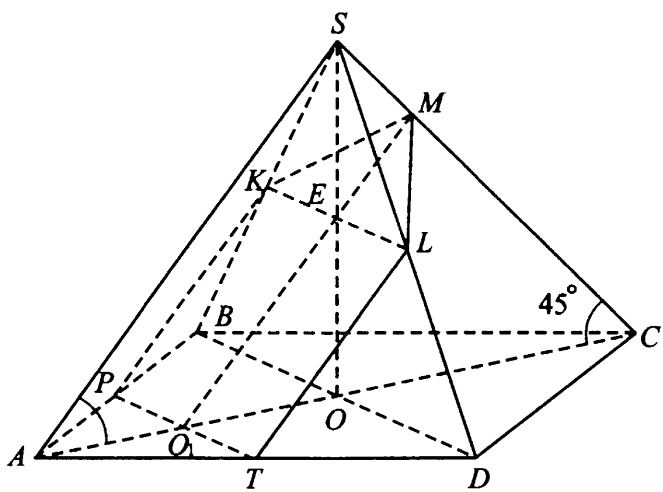


Рис. 37

Обозначим точки пересечения этой прямой с рёбрами SB и SD через K и L соответственно.

Точки O_1 и E лежат в плоскости α, значит, прямая O_1E также лежит в этой плоскости. Обозначим через M точку пересечения этой прямой с ребром SC. Соединяя последовательно точки T, P, K, M, L и T, получим искомое сечение.

$DB \perp ASC$, так как $DB \perp OS$ и $DB \perp OA$. $LK \parallel BD$, согласно вышесказанному, поэтому $LK \perp ASC$. Отсюда следует, что $LK \perp SM$.

$O_1E \parallel AS$ (O_1E — средняя линия ΔASO), $AS \perp SC$, так как $\angle ASC = 90°$, поэтому $O_1E \perp SC$. Отсюда следует, что $\alpha \perp SC$ (α проходит через пересекающиеся прямые LK и O_1E, перпендикулярные SC).

б) Из доказанного выше утверждения следует, что SM является высотой пирамиды $SKLM$ и $KL \perp EM$.

Так как $\angle ESM = 45°$ и ΔSME — прямоугольный, то $SM = ME$.

$$V_{SKLM} = \frac{1}{3}S_{KLM} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}KL \cdot EM \cdot SM = \frac{1}{6}KL \cdot SM^2.$$

$\Delta ASC \sim \Delta O_1MC$, $AO_1 = \frac{1}{4}AC$, поэтому $SM = \frac{1}{4}SC$.

Заметим, что треугольники ASC и ADC равны (по стороне и двум прилежащим углам), поэтому $SC = CD = 4$ и $SM = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$.

Наконец, $KL = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Отсюда получаем:

$$V_{SKLM} = \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

15. Заметим сначала, что
$x^2 - 10x + 25 = (5-x)^2$ и $-x^2 + 7x - 10 = (5-x)(x-2)$.

ОДЗ неравенства являются все решения системы:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ x^2 - 10x + 25 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1, \\ -x^2 + 7x - 10 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \neq 3, x \neq 4. \end{cases}$$

Преобразуем исходное неравенство, учитывая ОДЗ.

$\log_{x-2}(5-x) + 1 + \log_{5-x}(x-2) > 3$,

$\log_{x-2}(5-x) + \log_{5-x}(x-2) - 2 > 0$.

Сделаем замену $\log_{x-2}(5-x)=t$. Тогда неравенство принимает вид:
$t+\frac{1}{t}-2>0;\ \frac{t^2-2t+1}{t}>0;\ \frac{(t-1)^2}{t}>0.$

Множеством его решений является множество $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Сделаем обратную замену, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 0<\log_{x-2}(5-x)<1, \\ \log_{x-2}(5-x)>1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{x-2}(5-x)>\log_{x-2}(x-2), \\ \log_{x-2}1<\log_{x-2}(5-x)<\log_{x-2}(x-2); \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-2-1)(5-x-(x-2))>0, \\ \left\{\begin{array}{l} (x-2-1)(5-x-(x-2))<0, \\ (x-2-1)(1-(5-x))<0; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-3)(7-2x)>0, \\ \left\{\begin{array}{l} (x-3)(7-2x)<0, \\ (x-3)(x-4)<0; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3<x<3{,}5, \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>3{,}5, \end{array}\right. \\ 3<x<4; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3<x<3{,}5, \\ 3{,}5<x<4. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получим, что решением неравенства является множество $(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$.

Ответ: $(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$.

16. а) Обозначим заданный угол через ABC, радиусы окружностей r_1 и r_2 ($r_1<r_2$), а центры окружностей через O_1 и O_2 соответственно.

Так как центры окружностей равноудалены от сторон угла, то они лежат на биссектрисе угла B. Проведём из центров окружностей радиусы O_1T и O_2E в точки касания со стороной AB (см. рис. 38).

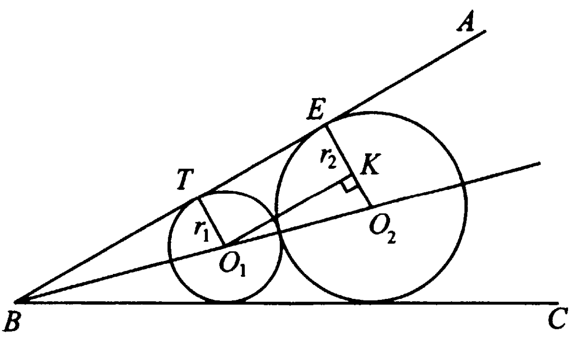


Рис. 38

Тогда O_1T и O_2E перпендикулярны AB.

Из центра O_1 меньшей окружности опустим перпендикуляр O_1K на радиус O_2E большей окружности. Получим прямоугольник O_1TEK. Тогда $EK = TO_1 = r_1$. Следовательно, $O_2K = O_2E - KE = r_2 - r_1$.

Так как $O_1K \parallel AB$, то $\angle ABO_2 = \angle KO_1O_2$. Отметим также, что $O_2O_1 = r_2 + r_1$.

Отсюда следует, что $\dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \dfrac{O_2K}{O_2O_1} = \sin\angle KO_1O_2 = \sin\angle ABO_2$.

Но, $\angle ABO_2 = \frac{\alpha}{2}$, где α — заданный угол, поэтому $\dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \sin\frac{\alpha}{2}$.

б) Подставляя заданные значения α и r_2 в полученную выше формулу, получаем:

$$\frac{10 - r_1}{10 + r_1} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ 5 + \frac{1}{2}r_1 = 10 - r_1,\ \frac{3}{2}r_1 = 5,\ r_1 = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

17. Обозначим через a то количество зеркал, которое изготавливал за каждый год первый предприниматель ($a \leqslant 210$). Тогда второй предприниматель изготавливал до обновления оборудования $0{,}9a$ зеркал.

После обновления оборудования он стал изготавливать $0{,}9a \cdot 1{,}8$ зеркал, то есть $1{,}62a$ зеркал.

Согласно условию задачи $1{,}62a > 244$, поэтому $a > 150$. Так как количество зеркал является натуральным числом, то $a \geqslant 151$.

Итак, $151 \leqslant a \leqslant 210$.

Обратим внимание на то, что $1{,}62a$ является целым числом, поэтому $162a$ делится нацело на 100. Тогда $81a$ делится на 50. Так как в разложении числа 81 на простые множители нет чисел 2 и 5, то a делится на 50.

Из указанного выше промежутка, содержащего a, только одно число 200 делится на 50. Отсюда получаем, что $1{,}62a = 1{,}62 \cdot 200 = 324$.

Ответ: 324.

18. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (x - (3a^2 + 1))^2 + a^2x^6 = a^2(9a^2 + 1), \\ y = ax^3; \end{cases}$$

равносильную исходной системе.

Преобразуем первое уравнение:

$$((x - 1) - 3a^2)^2 + a^2x^6 = 9a^4 + a^2,$$

$$(x - 1)^2 - 6a^2(x - 1) + 9a^4 + a^2x^6 = 9a^4 + a^2,$$

$$(x - 1)^2 - 6a^2(x - 1) + a^2x^6 - a^2 = 0,$$

$(x-1)^2-6a^2(x-1)+a^2(x^6-1)=0,$
$(x-1)^2-6a^2(x-1)+a^2(x^3-1)(x^3+1)=0,$
$(x-1)^2-6a^2(x-1)+a^2(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)=0,$
$(x-1)((x-1)+a^2(x^5+x^4+x^3+x^2+x-5))=0,$
$(x-1)((x-1)+a^2(x-1)(x^4+2x^3+3x^2+4x+5))=0,$
$(x-1)^2(1+a^2(x^4+2x^3+3x^2+4x+5))=0.$ $(*)$

Исследуем функцию $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$ с помощью производной.

$f'(x)=4x^3+6x^2+6x+4=(x+1)(4x^2+2x+4).$

$4x^2+2x+4>0$ для любого x, поэтому $f'(x)$ обращается в 0 в единственной точке -1.

Так как $f'(x)<0$ при $x<-1$,то $f(x)$ убывает при всех $x<-1$. Так как $f'(x)>0$ при $x>-1$, то$f(x)$ возрастает при всех $x>-1$.

Отсюда следует, что $f(x)$ принимает наименьшее значение в точке -1.

Но $f(-1)=3>0$, поэтому $f(x)>0$ на всей числовой прямой.

Отсюда следует, что $1+a^2(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)=1+a^2f(x)>0$.

Поэтому при любом a уравнение $(*)$ имеет единственное решение $x=1$, система — единственное решение $(1;a)$ при любом a.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

19. а) Так как билет $(6;9)$ является выигрышным, то, согласно стратегии (3), $(6\cdot 2;9\cdot 2)$ является выигрышным, значит, билет $(12;18)$ является выигрышным.

Так как $(6;9)=(3\cdot 2;3\cdot 3)$, то, согласно стратегии (3), билет $(3\cdot 2\cdot 2;\underline{3\cdot 3\cdot 2})$ является выигрышным. Аналогично, так как $(3\cdot 2;3\cdot 3)$ является выигрышным, то $(\underline{3\cdot 2\cdot 3};3\cdot 3\cdot 3)$ является выигрышным.

Заметим, что подчёркнутые одной чертой числа $\underline{3\cdot 3\cdot 2}$ и $\underline{3\cdot 2\cdot 3}$ равны, поэтому, согласно стратегии (2), билет $(3\cdot 2\cdot 2;3\cdot 3\cdot 3)$ является выигрышным, то есть $(12;27)$ является выигрышным.

Из предыдущего, согласно стратегии (3), получаем, что $(24;\underline{54})$ является выигрышным. Так как $(3\cdot 2;3\cdot 3)$ является выигрышным, то $(3\cdot 2\cdot 3\cdot 3;3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)$ является выигрышным, то есть $(\underline{54};81)$ является выигрышным. Тогда, согласно стратегии (2), билет $(24;81)$ является выигрышным.

б) Билет $(3\cdot 2^1;3\cdot 3^1)$ является выигрышным по условию. Выше установлено, что билеты $(12;27)=(3\cdot 2^2;3\cdot 3^2)$ и $(24;81)=(3\cdot 2^3;3\cdot 3^3)$ также являются выигрышными.

Рассмотрим теперь выигрышный билет $(3\cdot 2^3;3\cdot 3^3)$. Умножаем числа номера на 2, получим, что билет $(3\cdot 2^4;\underline{3\cdot 3^3\cdot 2})$ является выигрышным.

Так как $(3\cdot 2; 3\cdot 3)$ является выигрышным, то $(\underline{3\cdot 2\cdot 3^3}; 3\cdot 3\cdot 3^3)$ является выигрышным. Отсюда, по стратегии (2) получаем, что билет $(3\cdot 2^4; 3\cdot 3^4)$ является выигрышным.

И вообще, если билет $(3\cdot 2^s; 3\cdot 3^s)$, $s\in N$ является выигрышным, то, умножая числа номера на 2, получаем, что $(3\cdot 2^{s+1}; \underline{3\cdot 3^s\cdot 2})$ является выигрышным Так как $(3\cdot 2; 3\cdot 3)$ является выигрышным, то, умножая числа этого номера на 3^s, получим, что билет $(\underline{3\cdot 2\cdot 3^s}; 3\cdot 3\cdot 3^s)$ является выигрышным.

Отсюда по стратегии (2) получаем, что билет $(3\cdot 2^{s+1}; 3\cdot 3^{s+1})$ является выигрышным. Тем самым доказано, что билеты с номером $(3\cdot 2^k; 3\cdot 3^k)$ являются выигрышными для любого натурального k.

в) Выше установлено, что билет с номером $(3\cdot 2^m; 3\cdot 3^m)$ является выигрышным. Тогда, умножая числа номера на 3^n, получим, что билет $(3\cdot 2^m\cdot 3^n; 3\cdot 3^{m+n})$ выигрышный.

Совершенно аналогично убеждаемся, что билет $(3\cdot 2^p\cdot 3^q; 3\cdot 3^{p+q})$ является выигрышным. Но $m+n=p+q$ по условию, поэтому $3\cdot 3^{p+q}=3\cdot 3^{m+n}$. Пусть $3\cdot 3^{p+q}=A$, тогда билеты $(3\cdot 2^m\cdot 3^n; A)$ и $(3\cdot 2^p\cdot 3^q; A)$ являются выигрышными. Применяя сначала стратегию (1), потом стратегию (2), получим, что билет $(3\cdot 2^m\cdot 3^n; 3\cdot 2^p\cdot 3^q)$ является выигрышным.

Решение варианта 21

1. Поезд находился в пути 13 часов, так как до конца первых суток он шёл 8 часов 10 минут, а затем ещё 4 часа 50 минут.

Ответ: 13.

2. По диаграмме определяем, что по количеству производимых карамелек «Радость дантиста» превосходят «Хруст», «Кораблик», «Праздник», «Сладкое время» и «Детство». Таким образом, «Радость дантиста» занимает 6-е место.

Ответ: 6.

3. Достроим четырёхугольник $ABCD$ до прямоугольника $KBMN$ (см. рис. 39).

Тогда $S_{ABCD}=S_{KBMN}-(S_{AKB}+S_{BLC}+S_{CLMD}+S_{ADN})=$
$=7\cdot 10-(\frac{2\cdot 7}{2}+\frac{5\cdot 4}{2}+\frac{4+3}{2}\cdot 5+\frac{8\cdot 4}{2})=70-(7+10+17{,}5+16)=19{,}5.$

Ответ: 19,5.

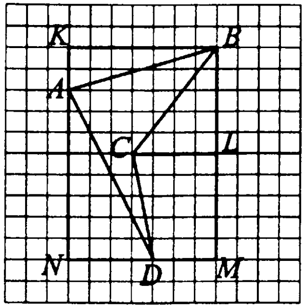


Рис. 39

4. Девочек родилось $8000-4140=3860$. Частота рождения девочек равна $\frac{3860}{8000}=0{,}4825\approx 0{,}483$.

Ответ: 0,483.

5. $\log_{14}(x-3)=\log_{14}(8x-11)$, $x-3=8x-31$, $7x=28$, $x=4$. Проверкой убеждаемся, что $x=4$ действительно является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

6. По условию задачи $AB=12$, $BC=8$, $CH=4$ (см. рис. 40).

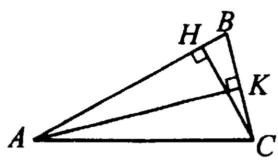


Рис. 40

Найдём площадь треугольника ABC.

$S_{ABC}=\frac{AB\cdot CH}{2}=\frac{12\cdot 4}{2}=24$. С другой стороны,

$S_{ABC}=\frac{BC\cdot AK}{2}=\frac{8\cdot AK}{2}=24$, откуда $AK=6$.

Ответ: 6.

7. Найдём скорость движения точки: $v(t)=x'(t)=t^2-2t-5$. По условию $v(t)=10$ м/с, значит, $t^2-2t-5=10$, $t^2-2t-15=0$, $t_1=5$, $t_2=-3$.

По смыслу задачи $t\geqslant 0$, следовательно, $t=5$ с.

Ответ: 5.

8. Радиус окружности, описанной вокруг квадрата со стороной 4, равен $r = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Объём цилиндра равен

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{8}{\pi} = \pi \cdot 8 \cdot \frac{8}{\pi} = 64.$$

Ответ: 64.

9. $\Big((7x+5y)^2 - 49x^2 - 25y^2\Big) : 10xy =$

$$= \frac{49x^2 + 70xy + 25y^2 - 49x^2 - 25y^2}{10xy} = \frac{70xy}{10xy} = 7.$$

Ответ: 7.

10. Наименьшее значение d_1 будет в том случае, когда значение d_2 будет наибольшим, то есть $d_2 = 250$. Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{250} = \frac{1}{50}, \; \frac{1}{d_1} = \frac{1}{50} - \frac{1}{250} = \frac{5-1}{250} = \frac{4}{250} = \frac{2}{125}.$$

Отсюда $d_1 = \dfrac{125}{2} = 62{,}5$.

Ответ: 62,5.

11. Пусть x — производительность труда первого маляра, y — производительность труда второго маляра. Тогда $x + y$ — производительность труда обоих маляров при совместной работе. Обозначив всю проделанную работу по покраске стен за 1, получим, что первый маляр проделает эту работу в одиночку за $\dfrac{1}{x}$ дней, второй маляр — за $\dfrac{1}{y}$ дней, а два маляра, работая вместе, — за $\dfrac{1}{x+y}$ дней. Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 15, \\ \dfrac{1}{x} = 20, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{20}, \\ x = \dfrac{1}{20}, \end{cases}$$

откуда $y = \dfrac{1}{60}$, $\dfrac{1}{y} = 60$ дней. Таким образом, второй маляр, работая самостоятельно, выполнит всю работу за 60 дней.

Ответ: 60.

12. $y' = (12x - \ln(12x) + 100)' = 12 - \dfrac{12}{12x} = \dfrac{12x - 1}{x}$.

$y' = 0$ при $x = \dfrac{1}{12}$, причём y' меняет знак в этой точке с «−» на «+».

Это означает, что $x = \dfrac{1}{12}$ является точкой минимума.

$$y\left(\frac{1}{12}\right) = 12 \cdot \frac{1}{12} - \ln\left(12 \cdot \frac{1}{12}\right) + 100 = 1 - 0 + 100 = 101.$$

Ответ: 101.

13. а) Преобразуем уравнение:

$\sin\left(2x - \dfrac{3\pi}{2}\right) - \sin x = 0$; $\cos 2x - \sin x = 0$; $1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$; $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$, откуда $\sin x = -1$ или $\sin x = \dfrac{1}{2}$ (см. рис. 41).

Из уравнения $\sin x = -1$ находим $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Из уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ находим $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

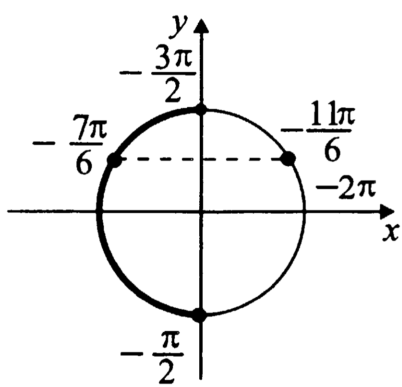


Рис. 41

Получаем числа: $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}$

14. Рассмотрим треугольную пирамиду D_1ACD (см. рис. 42).

В данной пирамиде расстояние от точки D до плоскости основания ACD_1 — DH — равно высоте пирамиды, проведённой из точки D, к основанию ACD_1.

$V_{D_1ABC} = \frac{1}{3}S_{ACD_1} \cdot DH$, из этого равенства получаем

$DH = \frac{3V_{D_1ACD}}{S_{ACD_1}}$.

Рассмотрим пирамиду D_1ABC. Расстояние от точки B до плоскости ACD_1 равно высоте, опущенной из вершины B к основанию ACD_1. Обозначим это расстояние BK. Тогда $V_{D_1ABC} = \frac{1}{3}S_{ACD_1} \cdot BK$, из этого получаем $BK = \frac{3V_{D_1ABC}}{S_{ACD_1}}$. Но $V_{D_1ACD} = V_{D_1ABC}$, так как, если считать в пирамидах основаниями ADC и ABC, то высота D_1D общая и $S_{ADC} = S_{ABC}$ ($\triangle ADC = \triangle ABC$ по двум катетам). Значит, $BK = DH$.

б) Найдём объём пирамиды D_1ACD.

Высота $D_1D = 4$.

$S_{ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 = 84$.

$V = \frac{1}{3}S_{ACD} \cdot D_1D = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot 4 = 112$.

Площадь грани ACD_1 равна $\frac{1}{2}AC \cdot D_1P$.

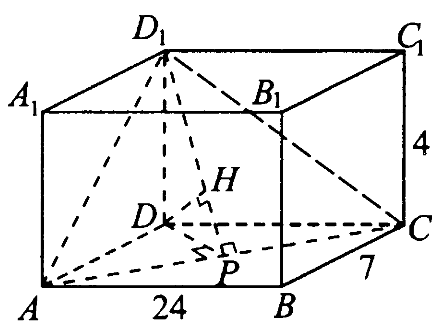


Рис. 42

$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$,

Зная, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла, в треугольнике ADC имеем $AD^2 = AC \cdot AP$, $AP = \frac{AD^2}{AC} = \frac{7^2}{25} = \frac{49}{25}$.

В прямоугольном треугольнике AD_1P по теореме Пифагора $D_1P^2 = AD_1^2 - AP^2 = 65 - \left(\frac{49}{25}\right)^2 = \frac{38\,224}{25^2}$, $D_1P = \frac{4\sqrt{2\,389}}{25}$.

$$S_{ACD_1} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{4\sqrt{2\,389}}{25} = 2\sqrt{2\,389}.$$

$$DH = \frac{3V}{S_{ACD_1}} = \frac{3 \cdot 112}{2\sqrt{2\,389}} = \frac{168}{\sqrt{2\,389}}.$$

Ответ: $\frac{168}{\sqrt{2\,389}}$.

15. Преобразуем неравенство. $\log_3 3 - \log_3 x^2 + \frac{4}{\log_3 9 + \log_3 x + 1} \geqslant 0$;

так как $x > 0$, то $1 - 2\log_3 x + \frac{4}{3 + \log_3 x} \geqslant 0$.

Обозначим $\log_3 x = t$. Получим неравенство $1 - 2t + \frac{4}{t+3} \geqslant 0$.

$$\frac{t + 3 - 2t(t+3) + 4}{t+3} \geqslant 0; \quad \frac{-2t^2 - 5t + 7}{t+3} \geqslant 0; \quad \frac{-(t-1)(t+\frac{7}{2})}{t+3} \geqslant 0.$$

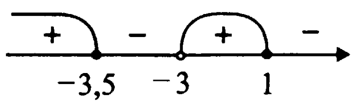


Рис. 43

Значит, $t \leqslant -3{,}5$ или $-3 < t \leqslant 1$ (см. рис. 43). Возвращаясь к x, получаем $\log_3 x \leqslant -3{,}5$, $0 < x \leqslant 3^{-3{,}5}$;

$-3 < \log_3 x \leqslant 1$, $\frac{1}{27} < x \leqslant 3$.

Ответ: $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{81}\right] \cup \left(\frac{1}{27}; 3\right]$.

16. а) $\triangle ABH = \triangle AQB$ по катету и гипотенузе ($BH = BQ$ по условию, AB общая), следовательно, $AH = AQ$ и $\angle HAB = \angle BAQ$ (см. рис. 44). AB — биссектриса угла A в $\triangle AHC$, по свойству биссектрисы $AH : AC = BH : BC = 1 : 3$. Обозначим $AH = x$, $BH = y$, тогда $BC = 3y$, $AQ = x$, $AC = 3x$, $QC = 2x$.

По теореме Пифагора в $\triangle BQC$ выполняется $BQ^2 + QC^2 = BC^2$, $y^2 + (2x)^2 = (3y)^2$, $4x^2 = 8y^2$, $x = \sqrt{2}y$.

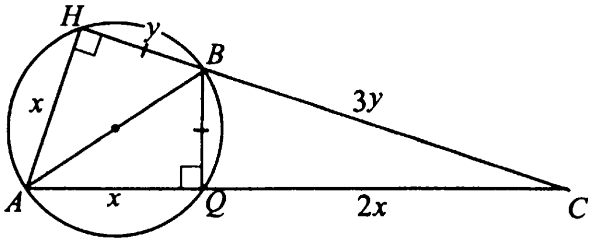


Рис. 44

В прямоугольном $\triangle ABQ$ $AB^2 = x^2+y^2 = 2y^2+y^2 = 3y^2$, $AB = \sqrt{3}y$. Так как $\triangle ABQ$ прямоугольный, то AB является диаметром описанной около него окружности. Мы получили, что диаметр описанной окружности $\triangle ABQ$ равен $\sqrt{3}BQ$.

б) $S_{BQC} = \frac{1}{2}BQ \cdot QC = \frac{1}{2}y \cdot 2x = xy$.

$S_{AHBQ} = 2S_{AHB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot xy = xy$, значит, $S_{AHBQ} = S_{BQC}$.

$S_{HQC} = \frac{1}{2}HC \cdot QC \cdot \sin C$,

$S_{BQC} = \frac{1}{2}BC \cdot QC \cdot \sin C$, тогда $\frac{S_{HQC}}{S_{BQC}} = \frac{HC}{BC} = \frac{4y}{3y} = \frac{4}{3}$,
$S_{HQC} = \frac{4}{3}S_{BQC} = \frac{4}{3}xy = 16$, $xy = 12$.

$S_{AHBQ} = 2S_{ABQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot xy = xy = 12$.

Ответ: 12.

17. Если сумма долга на конец месяца была a, тогда после увеличения на 3 % она станет $a + a \cdot \frac{3}{100} = 1{,}03a$. Пусть начальная сумма кредита была 100 %, после увеличения на 3 % в марте она составляла $1{,}03 \cdot 100\,\% = 103\,\%$ от суммы кредита. После 20 апреля долг стал 80 % от суммы кредита, значит, Степан заплатил $103\,\% - 80\,\% = 23\,\%$. В конце апреля долг стал $1{,}03 \cdot 80$, а после выплаты долг составил 60 %, значит, в мае Степан заплатил $1{,}03 \cdot 80 - 60 = 22{,}4\,\%$ от кредита. Аналогично в июне он заплатил $1{,}03 \cdot 60 - 40 = 21{,}8\,\%$ и в июле $1{,}03 \cdot 40 = 41{,}2\,\%$. Всего выплаты составили $23\% + 22{,}4\,\% + 21{,}8\,\% + 41{,}2\,\% = 108{,}4\,\%$.

Ответ: 8,4.

18. Преобразуем первое уравнение.

$x - y + 1 = 1, x - y = 0, y = x$, при этом $x - y + 1 > 0$.

Второе уравнение при замене $t = x^2 + y^2 - 10y + 25$ примет вид $at^2 - (2a^2 + a + 5)t + 10a + 5 = 0$.

При $a = 0$ получим $-5t + 5 = 0, t = 1$,

$$\begin{cases} y = x, \\ x^2 + y^2 - 10y + 25 = 1, \end{cases} \begin{cases} y = x, \\ 2x^2 - 10x + 24 = 0; \end{cases} \text{ решений нет.}$$

При $a \neq 0$ получим $t^2 - \left(\dfrac{2a^2 + a + 5}{a}\right)t + \dfrac{10a + 5}{a} = 0$,

$t^2 - \left(2a + 1 + \dfrac{5}{a}\right)t + \dfrac{(2a + 1) \cdot 5}{a} = 0$. По теореме, обратной теореме Виета,

из $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2a + 1 + \dfrac{5}{a}, \\ t_1 t_2 = (2a + 1) \cdot \dfrac{5}{a}; \end{cases}$ получим $t_1 = 2a + 1, t_2 = \dfrac{5}{a}$.

Вернёмся к x и y.

$$\begin{cases} y = x, \\ x^2 + (y - 5)^2 = t; \end{cases} \text{ где } t = t_1 \text{ или } t = t_2.$$

Указанная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = x, \\ x^2 + (x - 5)^2 = t; \end{cases} \begin{cases} y = x, \\ 2x^2 - 10x + (25 - t) = 0, \end{cases} \text{ где } t = t_1 \text{ или } t = t_2.$$

Согласно условию задачи, надо выбрать такие значения t, чтобы квадратное уравнение имело не более одного решения. Для этого дискриминант D_t квадратного уравнения должен удовлетворять условию $D_t \leqslant 0$.

Так как $D_t = 8t - 100$, то $t \leqslant \dfrac{25}{2}$.

Учитывая, что t имеет два значения t_1 и t_2, получаем, что искомые значения a будут решениями одной из систем:

$$1) \begin{cases} t_1 < \dfrac{25}{2}, \\ t_2 < \dfrac{25}{2}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} t_1 < \dfrac{25}{2}, \\ t_2 \leqslant \dfrac{25}{2}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} t_1 \leqslant \dfrac{25}{2}, \\ t_2 < \dfrac{25}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+1<\dfrac{25}{2}, \\ \dfrac{5}{a}<\dfrac{25}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a<\dfrac{23}{2}, \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{5}{2}<0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<\dfrac{23}{4}, \\ \dfrac{2-5a}{2a}<0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<\dfrac{23}{4}, \\ a<0, a>\dfrac{2}{5}; \end{cases}$$

$a<0$ или $\dfrac{2}{5}<a<\dfrac{23}{4}$.

Решения системы 2) добавят к множеству решений системы 1) $a=\dfrac{2}{5}$.

Решения системы 3) добавят к решению системы 1) ещё $a=\dfrac{23}{4}$. Таким образом искомые значения a образуют множество $(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{2}{5};\dfrac{23}{4}\right]$.

Ответ: $(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{2}{5};\dfrac{23}{4}\right]$.

19. а) Возможно. Пример строится так: достаточно, чтобы из А в Б перешёл всего один человек, имеющий показатель Q ниже, чем рейтинг страны А, но выше, чем рейтинг группы Б.

Пусть рейтинги участников группы Б были: 1, 1, 1, рейтинги участников группы А были: 5, 8, 8. Из группы А в группу Б перешёл человек с рейтингом 5. Рейтинг группы А повысился с 1 до 2, рейтинг группы Б повысился с 7 до 8.

б) Докажем для произвольных групп А и Б, что если при переходе нескольких человек из группы А в группу Б рейтинг обеих групп растёт, то:
1. До перехода рейтинг группы А был больше рейтинга группы Б;
2. После перехода рейтинг группы А остаётся больше рейтинга группы Б.
Введём обозначения:
m — число людей в исходной группе А, A — сумма их показателей;
n — число людей в исходной группе Б, B — сумма их показателей;
k — число перешедших людей, X — сумма их показателей.

По условию рейтинг обеих групп вырос, то есть $\dfrac{A-x}{m-k}>\dfrac{A}{m}$, $\dfrac{B+x}{n+k}>\dfrac{B}{n}$.

Из неравенства $\dfrac{A-X}{m-k}>\dfrac{A}{m}$ получаем:

$m(A-X)>A(m-k)$, $mX<Ak$, $\dfrac{A}{m}>\dfrac{X}{k}$, то есть рейтинг изначальной группы А больше рейтинга группы «перебежчиков». Кроме того, из неравенства $mX < Ak$ можно получить: $mX - kX < Ak - kX$, $X(m-k) < k(A-X)$, $\frac{X}{k} < \frac{A-X}{m-k}$, то есть рейтинг уменьшенной группы А также больше рейтинга группы «перебежчиков».

Аналогично из неравенства $\frac{B+X}{n+k} > \frac{B}{n}$ получаем:

$n(B+X) > B(n+k)$, $nX > Bk$, $\frac{X}{k} > \frac{B}{n}$, то есть рейтинг изначальной группы Б меньше рейтинга группы «перебежчиков». Кроме того, из неравенства $nX > Bk$ можно получить: $nX + kX < Bk + kX$, $X(n+k) > k(B+X)$, $\frac{X}{k} > \frac{B+X}{n+k}$, то есть рейтинг увеличенной группы Б также меньше рейтинга группы «перебежчиков».

Таким образом, оба наших вспомогательных утверждения доказаны ввиду $\frac{A}{m} > \frac{X}{k} > \frac{B}{n}$ и $\frac{A-X}{m-k} > \frac{X}{k} > \frac{B+X}{n+k}$. Следовательно, одновременное увеличение рейтингов обеих групп возможно лишь при переходах людей в одну сторону (из А в Б) и невозможно при переходе в другую сторону (из Б в А).

в) Расположим по невозрастанию показатели людей в группе А: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{10}$. Тогда рейтинг группы А до перехода равен $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}}{10}$, а после перехода он не превосходит a_1 (так как средний рейтинг группы не может превосходить наибольший показатель её участников). Следовательно, после перехода рейтинг группы А увеличился не более чем на $a_1 - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}}{10} = 0{,}9a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{10}$.

Заметим, что сразу все перешедшие не могут иметь показатель умственных способностей 1, так как в этом случае не произойдёт рост рейтинга группы Б. Поэтому $a_2 \geqslant 2$ и $a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} \geqslant 10$. Поэтому при рассматриваемом переходе людей рейтинг группы А растёт не более чем на $0{,}9a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{10} \leqslant 0{,}9 \cdot 9 - 1 = 7{,}1$. Значение 7,1 достигается в примере, когда в группе А находятся люди с показателями 9, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, а в группе Б все имеют показатель, равный 1. В группу Б переходят все из группы А, кроме человека с показателем 9. Рост рейтинга группы А составляет $\frac{9}{1} - \frac{19}{10} = 7{,}1$.

Ответ: а) да, б) нет, в) 7,1.

Решение варианта 25

1. Показания счётчика за июнь:
$287 - 279 = 8$ (куб. м)
$8 \cdot 24{,}4 = 195{,}2$ (руб.)

Ответ: 195,2.

2. За рассматриваемый период с 16 по 28 марта выпадало 4 и более миллиметров осадков — это 16 марта, 20 марта, 22 марта. Итого 3 дня.

Ответ: 3.

3. Площадь большого круга равна $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ (по клеткам считаем $R = 5$), площадь меньшего круга равна $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$ (по клеткам считаем $r = 5$), тогда $25\pi - 9\pi = 16\pi$ — площадь заштрихованной части.

В ответе запишем $\frac{S_{\text{фигуры}}}{\pi} = \frac{16\pi}{\pi} = 16$.

Ответ: 16.

4. На каждом из разветвлений лошадь выбирает одно направление из двух возможных. Всего выбор направления делается 4 раза, каждый раз независимо от предыдущего выбора. Вероятность того, что каждый раз выбирается один путь из двух, а разветвлений 4, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

Ответ: 0,0625.

5. $\frac{2x+4}{3x+17} = \frac{2x+4}{17x+3}$.

$(2x+4)(17x+3) = (2x+4)(3x+17)$, $(2x+4)(17x+3-3x-17) = 0$,
$x = -2$; $14x - 14 = 0$, $x = 1$.

Больший корень из двух равен 1.

Ответ: 1.

6. $S_{ADE} = \dfrac{DE \cdot AM}{2}$, $AM \perp DC$ (см. рис.45).

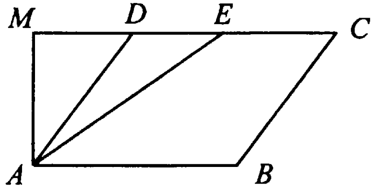


Рис. 45

$S_{ABCD} = AB \cdot AM$, $AB = 2DE$.
$AB \cdot AM = 284$, $2DE \cdot AM = 284$.

$DE \cdot AM = 142$, $S_{ADE} = \dfrac{142}{2} = 71$.

Ответ: 71.

7. При условии $f'(x) > 0$ на промежутке $(a; b)$, функция на этом промежутке возрастает. Рассмотрим график $y = f'(x)$. Точки x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 принадлежат графику, где $f'(x) > 0$. Таких точек — 5.
Ответ: 5.

8. $S_{\substack{\text{боковой}\\ \text{поверхности}}} = 2\pi r h$, $96\pi = 2\pi \cdot 8h$, $h = \dfrac{96\pi}{16\pi} = 6$ (см. рис.46).

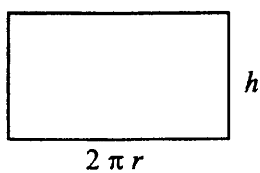


Рис. 46

Ответ: 6.

9. $(\log_5 125) \cdot \log_7 49 = \log_5 5^3 \cdot \log_7 7^2 = 3\log_5 5 \cdot 2\log_7 7 = 6$.
Ответ: 6.

10. $H(t) = H_0 - kt\sqrt{2gH_0} + \frac{g}{2}k^2t^2$, используя данные $H_0 = 45$ м, $k = \dfrac{1}{50}$, $g = 10$ м/с^2, $H \leqslant 20$ м, получим

$$45 - \frac{1}{50} \cdot t\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} + \frac{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 \cdot t^2 \leqslant 20,$$

$$45 - \frac{t}{50}\sqrt{900} + 5 \cdot \frac{1}{2\,500} \cdot t^2 - 20 \leqslant 0,$$

$$25 - \frac{30t}{50} + \frac{t^2}{500} \leqslant 0,\ 12\,500 - 300t + t^2 \leqslant 0, t^2 - 300t + 12\,500 \leqslant 0,$$

$$\frac{D}{4} = (150)^2 - 12\,500 = 22\,500 - 12\,500 = 10\,000 = 100^2,\ t = 150 \pm 100,$$

$t_1 = 250$, $t_2 = 50$. $50 \leqslant t \leqslant 250$.

Ответ: 50.

11. Примем объём работы за единицу. Пусть x — количество дней, за которое необходимо выполнить всю работу Виктору; за y дней работу выполнит Алексей, Андрей выполнит всю работу за z дней; тогда $\frac{1}{x}$ — производительность Виктора, $\frac{1}{y}$ — производительность Алексея, $\frac{1}{z}$ — производительность Андрея.

По первому условию Виктор и Алексей сделают всю работу за 8 дней, значит, их общая производительность $\frac{1}{8}$. Составим уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$.

По второму условию Виктор и Андрей сделают всю работу за 8 дней. Значит, их общая производительность $\frac{1}{8}$. Составим уравнение. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8}$.

По третьему условию Андрей и Алексей выполнят всю работу за 12 дней. Значит, их общая производительность $\frac{1}{12}$. Составим уравнение. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}; \end{cases}$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12},$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{3},$$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$.

$1 : \frac{1}{6} = 6$ (дней).

Итак, всю работу Виктор, Алексей и Андрей сделают за 6 дней.

Ответ: 6.

12. $u = \log_2(4 + 10x - x^2) - 71$.

ОДЗ: $4 + 10x - x^2 > 0, x^2 - 10x - 4 < 0, 5 - \sqrt{29} < x < 5 + \sqrt{29}$.

Найдём производную заданной функции и стационарные точки (см. рис. 47).

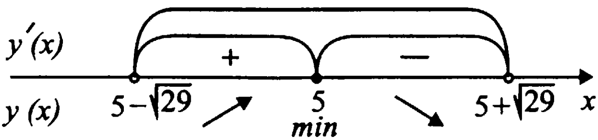


Рис. 47

$y' = \frac{10 - 2x}{(4 + 10x - x^2)\ln 2}$.

$y' = 0, 10 - 2x = 0, x = 5$.

Так как при переходе через точку $x = 5$ производная функции меняет знак с $+$ на $-$, то $x = 5$ является точкой максимума.

Ответ: 5.

13. а) Разделим обе части уравнения на $20^{\cos x} > 0$ и получим уравнение $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x} - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} - 1 = 0$. Пусть $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} = t$, где $t > 0$. Квадратное уравнение $16t^2 - 6t - 1 = 0$ имеет корни $t_1 = -\frac{1}{8}$ (не удовлетворяет условию $t > 0$) и $t_2 = \frac{1}{2}$. Из уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} = \frac{1}{2}$ получаем $\cos x = 1$; $x = 2\pi n, n \in Z$.

б) Найдем корни в промежутке $\left[-\frac{11}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. $-\frac{11\pi}{2} \leqslant 2\pi n \leqslant \frac{3\pi}{2}, n \in Z$, $-\frac{11}{4} \leqslant n \leqslant \frac{3}{4}$; Отсюда находим $n_1 = -2$ и $x_1 = -4\pi$; $n_2 = -1$ и $x_2 = -2\pi$; $n_3 = 0$ и $x_3 = 0$.

Ответ: а) $2\pi n, n \in Z$; б) -4π; -2π; 0.

14. а) Так как данная призма правильная, то $BB_1 \perp ABCD$, отсюда $BB_1 \perp AC$. Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $AC \perp BD$. Таким образом, $AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$. Так как прямые BD и BB_1 пересекаются, то, согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AC \perp BB_1D_1D$. Теперь по признаку перпендикулярности плоскостей $AD_1C \perp BB_1D_1$ (см. рис. 48).

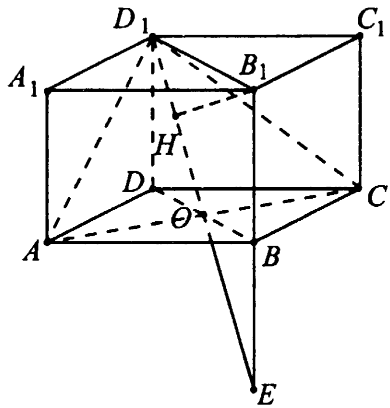


Рис. 48

б) Обозначим через O точку пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$. Плоскости AD_1C и BB_1D_1 пересекаются по прямой OD_1. Пусть B_1H — перпендикуляр, проведенный в плоскости BB_1D_1 к прямой OD_1. Тогда $B_1H \perp AD_1C$. Пусть $E = OD_1 \cap BB_1$. Для подобных треугольников D_1B_1E и OBE (равенство соответствующих углов следует из условия $BO \parallel B_1D_1$) имеем $\dfrac{B_1E}{BE} = \dfrac{B_1D_1}{BO} = \dfrac{2}{1}$.

Значит, $B_1E = 2BE = 2 \cdot 6 = 12$. Так как $B_1D_1 = 5\sqrt{2}$, то гипотенуза $D_1E = \sqrt{B_1E^2 + B_1D_1^2} = \sqrt{12^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{194}$. Далее применяем метод площадей в треугольнике D_1B_1E для вычисления высоты B_1H, опущенной на гипотенузу D_1E:

$$S_{D_1B_1E} = \frac{1}{2}B_1E \cdot B_1D_1 = \frac{1}{2}D_1E \cdot B_1H;\ 12 \cdot 5\sqrt{2} = \sqrt{194} \cdot B_1H;$$

$$B_1H = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{194}} = \frac{60}{\sqrt{97}} = \frac{60\sqrt{97}}{97}.$$

Ответ: $\dfrac{60\sqrt{97}}{97}$.

15. Пусть $|2^x - 3| = t$, тогда получаем неравенство $t \geqslant 4 + \frac{1}{6-t}$. Преобразуем последнее неравенство: $4 - t + \frac{1}{6-t} \leqslant 0$; $\frac{t^2 - 10t + 25}{6-t} \leqslant 0$; $\frac{(t-5)^2}{6-t} \leqslant 0$. Используя метод интервалов, найдем решения неравенства с переменной t: $t = 5$ или $t > 6$. Отсюда $|2^x - 3| = 5$ или $|2^x - 3| > 6$. Пусть $2^x = a$, решим уравнение и неравенство с модулем. Из уравнения $|a - 3| = 5$ получаем $\left[\begin{array}{l} a - 3 = 5, \\ a - 3 = -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 8, \\ a = -2. \end{array}\right.$ Далее $\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $x = 3$. Модуль $|a - 3|$ есть расстояние на координатной оси от точки a до точки 3. Для решения неравенства $|a - 3| > 6$ необходимо найти такие точки, расстояние от которых до точки 3 больше 6. Справа от точки 3 расположена точка 9 на расстоянии 6 единиц, а слева — точка (-3). Поэтому из неравенства $|a - 3| > 6$ получаем $a < -3$ или $a > 9$. Далее $\left[\begin{array}{l} 2^x < -3, \\ 2^x > 9; \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow 2^x > 2^{\log_2 9} \Leftrightarrow x > \log_2 9$.

Ответ: $\{3\} \cup (\log_2 9; +\infty)$.

16. а) Обозначим $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$, p — полупериметр $\triangle ABC$. Выполняются следующие равенства (см. рис. 49):

$$S = S_{ABC} = S_{O_aCA} + S_{O_aBA} - S_{O_aCB} =$$

$$= \frac{1}{2}O_aG \cdot AC + \frac{1}{2}O_aE \cdot AB - \frac{1}{2}O_aT_a \cdot BC =$$

$$= \frac{1}{2}r_ab + \frac{1}{2}r_ac - \frac{1}{2}r_aa = \frac{r_a}{2}(c + b - a).$$

Отсюда получаем $r_a = \frac{2S}{c+b-a}$. Аналогично получается формула $r_b = \frac{2S}{c+a-b}$.

Используя формулы $r_a = \frac{2S}{c+b-a}$, $r_b = \frac{2S}{c+a-b}$, $c^2 = a^2 + b^2$ и $S = \frac{ab}{2}$, получаем:

$$r_ar_b = \frac{4S^2}{(b+c-a)(a+c-b)} = \frac{4S^2}{c^2 - (b-a)^2} = \frac{4S^2}{2ab} = \frac{2S^2}{2S} = S,$$ то есть $S = r_ar_b$.

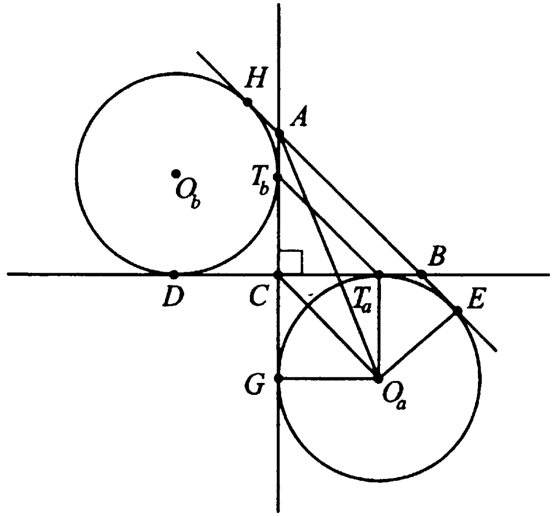


Рис. 49

б) Так как $S_{ABC} = r_a r_b$ и площадь прямоугольного треугольника T_aCT_b равна $\frac{1}{2} \cdot CT_a \cdot CT_b = \frac{1}{2} \cdot r_a r_b = 15$, то искомая площадь равна $30 - 15 = 15$.

Ответ: 15.

17. Пусть N — сумма вложений. В проект A может быть вложено $0{,}2N$, а в проект B — $0{,}8N$. Тогда от участия в проекте A банк получит средств от $1{,}27 \cdot (0{,}2N) = 0{,}254N$ до $1{,}32 \cdot (0{,}2N) = 0{,}264N$, а от участия в проекте B — от $1{,}37 \cdot (0{,}8N) = 1{,}096N$ до $1{,}42 \cdot (0{,}8N) = 1{,}136N$. Суммарно банк может получить от $1{,}35N$ до $1{,}4N$. То есть доходы P банка $1{,}35N \leqslant P \leqslant 1{,}4N$. Пусть процентная ставка по вкладам, начисляемая банком, равна a. Тогда в конце года банк должен выплатить клиентам $V = N\left(1 + \frac{a}{100}\right)$. Для выполнения условия задачи выплаты клиентам составят не менее 15 % и не более 20 % годовых от суммарных вложений в проекты A и B, то есть $1{,}15N \leqslant V \leqslant 1{,}2N$.

Чистая прибыль банка равна разности доходов и выплат клиентам, то есть $P - V$, а чистая прибыль в процентах от вложений равна

$\dfrac{P-V}{N}\cdot 100\%$. Мы получили, что $1{,}35 \leqslant \dfrac{P}{N} \leqslant 1{,}4$; $1{,}15 \leqslant \dfrac{V}{N} \leqslant 1{,}2$, $-1{,}2 \leqslant -\dfrac{V}{N} \leqslant -1{,}15$.

Сложим неравенства $1{,}35+(-1{,}2) \leqslant \dfrac{P}{N}+\left(-\dfrac{V}{N}\right) \leqslant 1{,}4+(-1{,}15)$.

$0{,}15 \leqslant \dfrac{P-V}{N} \leqslant 0{,}25$, $15\,\% \leqslant \dfrac{P-V}{N}\cdot 100\,\% \leqslant 25\,\%$.

Наименьшая прибыль банка может быть $15\,\%$, наибольшая — $25\,\%$.

Например, для суммы $1{,}35N$ при ставке $20\,\%$ чистая прибыль банка составит $(1{,}35N-1{,}2N)\cdot 100\,\% : N = 15\,\%$, для суммы $1{,}4N$ при ставке $15\,\%$ чистая прибыль банка составит $(1{,}4N-1{,}15N)\cdot 100\,\% : N = 25\,\%$.

Ответ: $15\,\%$ и $25\,\%$.

18. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $0 < 4+a+(5a^2+\sin^2 x)\sin x + a(2\sin^2 x - 1) \leqslant 5$.

Пусть $\sin x = t$, тогда получим неравенство
$-4 < t^3+2at^2+5a^2t \leqslant 1$ $(*)$, которое должно выполняться при всех значениях $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Если $a=0$, то неравенство $(*)$ выполняется для любого $t\in[-1;1]$.

Пусть $a\neq 0$. Функция $f(t)=t^3+2at^2+5a^2t$ возрастает на промежутке $[-1;1]$, так как производная $f'(t)=3t^2+4at+5a^2>0$ при всех значениях $t\in R$ и $a\neq 0$ (дискриминант $D<0$ и старший коэффициент больше нуля).

Неравенство $(*)$ будет выполняться для $t\in[-1;1]$ при условиях
$$\begin{cases} f(-1)>-4, \\ f(1)\leqslant 1, \\ a\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2a-5a^2>-4, \\ 1+2a+5a^2\leqslant 1, \\ a\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2-2a-3<0, \\ 5a^2+2a\leqslant 0, \\ a\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$-\dfrac{2}{5}\leqslant a<0$.

Итак, условие выполняется при $-\dfrac{2}{5}\leqslant a\leqslant 0$.

Ответ: $\left[-\dfrac{2}{5};0\right]$.

19. а) Нельзя. Среднее арифметическое всех семи чисел равно
$\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$, то есть является целым числом.

б) Нельзя. Среднее арифметическое всех $2k+1$ чисел равно
$\dfrac{1+2+\ldots+(2k+1)}{2k+1} = \dfrac{(1+(2k+1))(2k+1)}{2} : (2k+1) = k+1$, то есть является целым числом.

в) Можно. Например, 2; 1; 4; 3; 6; 5. Суммы из двух чисел (3; 5; 7; 9; 11) не делятся на два, суммы из трех чисел (7; 8; 13; 14) не делятся на 3, суммы из четырех чисел (10; 14; 18) не делятся на 4, суммы из пяти чисел (16; 19) не делятся на 5, сумма всех шести чисел (21) не делится на 6.

г) Можно. Например, $2; 1; 4; 3; \ldots\ 2k;\ 2k-1$. Рассмотрим среднее арифметическое подряд идущих m чётных чисел и m нечётных чисел:

$$\frac{2k+2(k+1)+\ldots+2(k+m-1)+(2k-1)+(2(k+1)-1)+\ldots+2(k+m-1)-1}{2m} =$$

$$\frac{(2k-1)+2k+\ldots+2(k+m-1)}{2m} = \frac{(2k-1)+2(k+m-1)}{2}\cdot 2m : 2m =$$

$$= \frac{4k+2m-3}{2} = 2k+m-\frac{3}{2},$$ то есть не целое число.

Рассмотрим среднее арифметическое подряд идущих m чётных чисел и $(m-1)$ нечётных чисел $(m>1)$:

$$\frac{2k+2(k+1)+\ldots+2(k+m-1)+(2k-1)+(2(k+1)-1)+\ldots+2(k+m-2)-1}{2m-1} =$$

$$\frac{(2k-1)+2k+\ldots+2(k+m-1)-(2(k+m-1)-1)}{2m-1} =$$

$$= \left(\frac{(2k-1)+2(k+m-1)}{2}\cdot 2m-(2(k+m-1)-1)\right) : (2m-1) =$$

$$= \frac{(4k+2m-3)m-2k-2m+3}{2m-1} =$$

$$= \frac{(2m-1)m+2k(2m-1)-2(2m-1)+1}{2m-1} = m+2k-2+\frac{1}{2m-1},$$ то есть не целое число.

Рассмотрим среднее арифметическое подряд идущих $(m-1)$ чётных чисел и m нечётных чисел $(m>1)$:

$$\frac{2(k+1)+2(k+2)+\ldots+2(k+m-1)+(2k-1)+(2(k+1)-1)+\ldots+2(k+m-1)-1}{2m-1} =$$

$$\frac{(2k-1)+2k+\ldots+2(k+m-1)-2k}{2m-1} =$$

$$= \left(\frac{(2k-1)+2(k+m-1)}{2}\cdot 2m-2k\right) : (2m-1) =$$

$$= \frac{(4k+2m-3)m-2k}{2m-1} = \frac{(2m-1)m+4km-2k-2m}{2m-1} =$$

$$= \frac{(2m-1)m+2k(2m-1)-2m+1-1}{2m-1} = m+2k-1-\frac{1}{2m-1},$$ то есть не целое число.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да; г) да.

Решение варианта 29

1. $500 - 120 \cdot 2{,}4 = 212$ (рублей).

Ответ: 212.

2. В период с 21 по 27 ноября наибольшая среднесуточная температура была 27 ноября и равнялась 10 °C.

Ответ: 10.

3. Стороны параллелограмма CO и AB равны и параллельны оси ординат Oy. Значит, ординату точки A можно найти следующим образом: $y_A = y_B + AB$, при этом $AB = OC = 18$, $y_B = 4$.

Тогда $y_A = 4 + 18 = 22$.

Ответ: 22.

4. Вероятность команды «Мороз» начать игру в любой встрече равна 0,5. Значит, вероятность начать первую и третью игру равна $0{,}5 \cdot 0{,}5$, а вероятность того, что при этом вторую игру команда не будет начинать, равна $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$.

Ответ: 0,125.

5. $\log_6(5x+27) = \log_6(3+x) + \log_6 6$, $\log_6(5x+27) = \log_6(6 \cdot (3+x))$,

$\log_6(5x+27) = \log_6(18+6x)$, $5x+27 = 18+6x$, $x = 9$.

Проверка: $\log_6(5 \cdot 9 + 27) = \log_6(3+9) + 1$,

$\log_6 72 = \log_6 12 + 1$, $\log_6 72 = \log_6 72$.

$x = 9$ — корень уравнения.

Ответ: 9.

6. По условию $\sin A = \frac{1}{3}$ (см. рис. 50).

$\angle A = \angle BCH$, значит, $\sin \angle BCH = \frac{1}{3}$ и $\frac{BH}{BC} = \frac{1}{3}$.

$BC = 3BH = 3 \cdot 7 = 21$.

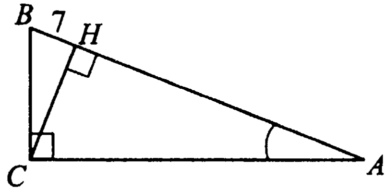


Рис. 50

Высота CH проведена из вершины прямого угла $\triangle ABC$, поэтому она делит его на два подобных треугольника CBH и ABC.

Из подобия $\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{BA}$, $BA = \frac{BC^2}{BH} = \frac{21^2}{7} = 63$.

Ответ: 63.

7. $F(9) - F(3) = S$, где S — площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $y = 0$ и $x = 3$, $x = 9$. Рассмотрим рисунок 51.

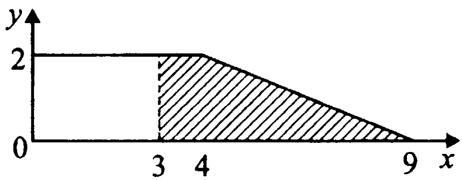


Рис. 51

Данная фигура — трапеция с основаниями 6 и 1 и высотой 2. Её площадь равна $\frac{6+1}{2} \cdot 2 = 7$.

Ответ: 7.

8. Площадь поверхности тетраэдра равна сумме площадей 4 одинаковых граней. Площадь грани равна $\frac{46}{4}$. Площадь поверхности многогранника равна сумме площадей 8 его граней, при этом каждая его грань — треугольник, образованный средними линиями грани тетраэдра, поэтому площадь этой грани равна $\frac{1}{4}$ площади грани тетраэдра.

Искомая площадь равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{46}{4} \cdot 8 = 23$.

Ответ: 23.

9. $\log_7 84 - \log_7 12 = \log_7 \frac{84}{12} = \log_7 7 = 1.$

Ответ: 1.

10. По условию $U = 30\cos(80\,°t + 30°)$. Лампочка горит, если $U \geqslant 15$, то есть $\cos(80\,°t + 30°) \geqslant 0{,}5$.

Рассмотрим промежуток времени $t \in [0; 1]$.

При этом $80°t + 30°$ меняется от $30°$ до $110°$, при этом $\cos(80°t + 30°) \geqslant 0{,}5$, если аргумент меняется от $30°$ до $60°$ (см. рис. 52).

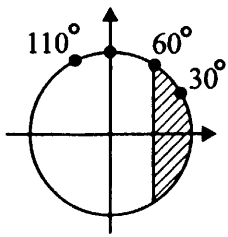


Рис. 52

Лампочка будет гореть $\frac{30}{80}$ первой секунды, или $\frac{30}{80} \cdot 100\,\% = 37{,}5\,\%$.

Ответ: 37,5 %.

11. Расстояние увеличивается каждый день на одну и ту же величину d, а значит, последовательность таких расстояний — арифметическая прогрессия.

За 5 дней пройденный путь равен $\frac{(a_1 + a_5)}{2} \cdot 5 = 3\,270$, где a_1, a_3 и a_5 — путь, пройденный в первый, третий и пятый дни соответственно.

По свойству арифметической прогрессии $a_3 = a_1 + 2d$, $a_5 = a_1 + 4d$, значит, $a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2}$. Тогда $a_3 = 3\,270 : 5 = 654$ (км).

Ответ: 654.

12. В точке максимума производная функции меняет знак с «$-$» на «$+$».

$y' = ((x-7)^2 \cdot (x+8) + 29)' = 2(x-7)(x+8) + (x-7)^2 =$
$= (x-7)(2(x+8) + (x-7)) = (x-7)(3x+9)$.

$y' = 0$ при $x = 7$ и $x = -3$ (см. рис. 53).

$x = -3$ — точка максимума функции.

Ответ: -3.

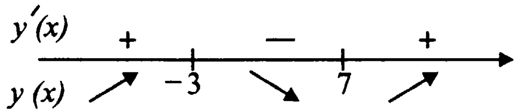


Рис. 53

13. а) Используя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного аргумента, получим уравнение, левую часть которого разложим на множители $\cos x(2\sin x - \cos x) = 0$. Получим два уравнения.

1) $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$;

2) $2\sin x - \cos x = 0$, которое равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, тогда $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

б) На схеме изображена числовая окружность, на которой выделена дуга от $-\pi$ до $\frac{\pi}{2}$. Промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат четыре корня, $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 54).

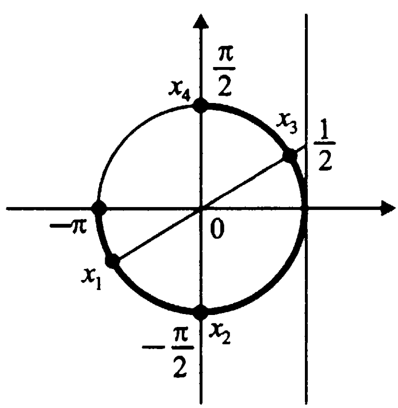


Рис. 54

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, где $k \in Z$. б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2}$.

14. а) Рассмотрим рисунок 55. Заметим, что параллелепипед $ABB_1A_1EDD_1E_1$ является правильной призмой (ABB_1A_1 — квадрат). $BD \perp EDD_1$, тогда $BD \perp ED_1$, $ED_1 \perp ED$ как диагонали квадрата, значит, $ED_1 \perp A_1BD$, следовательно, $ED_1 \perp BE_1$, и угол между ними прямой.

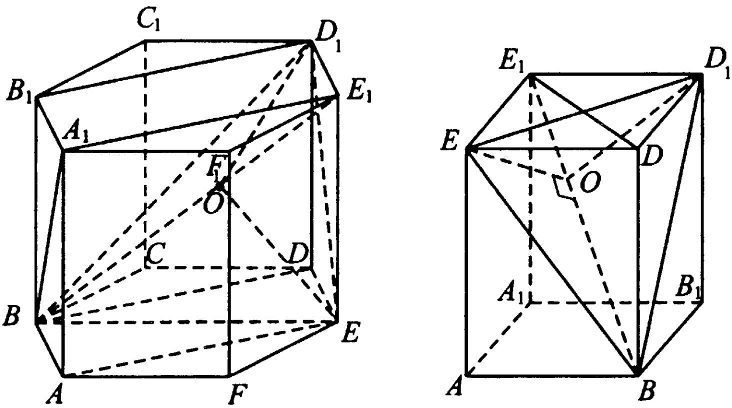


Рис. 55

б) Рассмотрим двугранный угол EE_1BD_1 и его линейный угол EOD_1. С помощью теоремы косинусов можно найти высоту $AE = \sqrt{3}$ параллелепипеда. Диагональ боковой грани $BE = \sqrt{BA^2 + AE^2} = 2$ и диагональ $BE_1 = \sqrt{BE^2 + EE_1^2} = \sqrt{5}$ параллелепипеда.

В прямоугольном треугольнике с известными катетами $BE = 2$, $EE_1 = 1$ и гипотенузой $BE_1 = \sqrt{5}$ найдём высоту

$$EO = \frac{BE \cdot EE_1}{BE_1} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Из равенства треугольников BEE_1 и E_1BD_1 следует, что треугольник EOD_1 является равнобедренным $OE = OD_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ с основанием

$ED_1 = \sqrt{ED^2 + DD_1^2} = \sqrt{2}.$

Применяя теорему косинусов $ED_1^2 = EO^2 + OD^2 - 2EO OD_1 \cos \angle EOD_1$, найдём $\cos EOD_1 = -\frac{1}{4}$, значит, угол между плоскостями ABD_1 и BB_1E равен $\arccos \frac{1}{4}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{4}$.

15. Очевидно, что $x > 0$. Заметим, что $\log_2 x < 2^x$ при $x > 0$, график функции $y = \log_2 x$ лежит ниже прямой $y = x$, а график функции $y = 2^x$ лежит выше этой прямой, поэтому знаменатель дроби принимает только отрицательные значения. Докажем, что это верно.

Докажем, что $2^x > x$. Рассмотрим $f(x) = 2^x - x$. $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1$. $f'(x) = 0$ при $2^x \ln 2 - 1 = 0$, $2^x = \frac{1}{\ln 2}$, $x_1 = \log_2 \frac{1}{\ln 2}$ — точка минимума, $f(x_1)$ — наименьшее значение $f(x)$.

Докажем, что $f(x_1) > 0$.

$\frac{1}{\ln 2} - \log_2 \frac{1}{\ln 2} > 0$; $\log_2 e - \log_2 \log_2 e > 0$; $\log_2 e > \log_2 \log_2 e$; $e > \log_2 e$; $2^e > e$. Это верно, так как $2^e > 2^2 > e$.

Мы доказали, что $2^x > x$. Но тогда $\log_2 2^x > \log_2 x$ и $x > \log_2 x$. $2^x > x > \log_2 x$, значит, $2^x - \log_2 x > 0$.

Умножив обе части неравенства на $\log_2 x - 2^x$, получим неравенство $4^x + \log_2 x - 12 \leqslant \log_2 x - 2^x$, которое легко сводится к неравенству $4^x + 2^x - 12 \leqslant 0$. Решив его методом подстановки, найдём все его решения $x \leqslant \log_2 3$. Учитывая, что $x > 0$, получим все решения данного неравенства: $x \in (0; \log_2 3]$.

Ответ: $(0; \log_2 3]$.

16. а) Высоту CH треугольника ABC можно найти по теореме Пифагора, она равна 12.

Тогда площадь S треугольника ABC равна 60, периметр P равен 36, радиус вписанной окружности равен $r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 60}{36} = \frac{10}{3}$.

б) Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда $OH = \frac{10}{3}$. O и O_1 лежат на биссектрисе $\angle A$.

Отрезки O_1M и O_2N — радиусы, проведённые в точки касания окружностей со стороной AB. $OM \perp AB$, $ON \perp AB$ (см. рис. 56).

Треугольники AOH и AO_1M подобны по двум углам, поэтому их стороны пропорциональны: $\dfrac{OH}{O_1M} = \dfrac{AH}{AM}$; $\dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{AM}$; $AM = 1,5$.

$O_1O_2 = MN = 10 - 2 \cdot 1{,}5 = 7$.

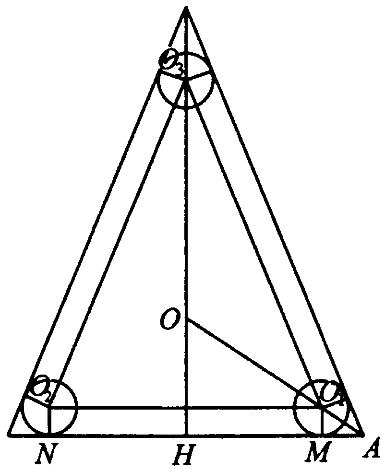


Рис. 56

Треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ подобны, потому что их соответственные стороны параллельны. Коэффициент подобия $k = \dfrac{AB}{O_1O_2} = \dfrac{10}{7}$, поэтому площадь $S_{O_1O_2O_3} = S_{ABC} : k^2 = 60 \cdot \dfrac{49}{100} = 29{,}4$.

Ответ: а) $\dfrac{10}{3}$; б)29,4.

17. Для краткости записи число 30 000 обозначим через N. На поверхности мышки:

после 1-й дезинфекции осталось $2N - n$ бактерий;

после 2-й дезинфекции осталось $2(2N - n) - n = 4N - 3n$ бактерий;

после 3-й дезинфекции осталось $2(4N - 3n) - n = 8N - 7n$ бактерий;

после 4-й дезинфекции осталось $2(8N-7n)-n = 16N-15n$ бактерий.

По условию задачи $16N - 15n = 0$, поэтому $n = \dfrac{16N}{15}$.

Если $N = 30\,000$, то $n = \dfrac{16 \cdot 30000}{15} = 32000$ бактерий погибало во время каждой дезинфекции.

Ответ: 32 000.

18. Если $x \geqslant 0$, то уравнение $(|x| - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2$ задаёт окружность с центром $C_2(4;3)$ радиусом $\sqrt{2}$. Если $x < 0$, то это уравнение задаёт окружность с центром $C_1(-4; 3)$ радиусом $\sqrt{2}$.

Второе уравнение $y = |x - 1| + a$ системы задаёт прямой угол с переменной вершиной $(1; a)$, находящейся на прямой $x = 1$.

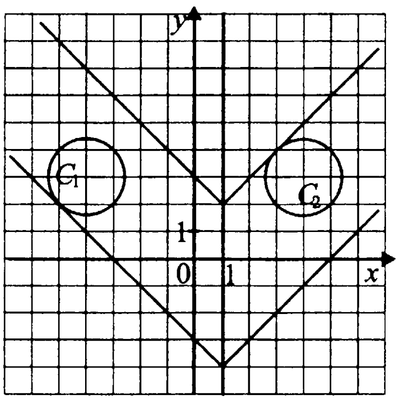


Рис. 57

Графики этих уравнений имеют единственную общую точку тогда, когда одна сторона прямого угла касается одной из окружностей, а вторая сторона этого угла не имеет с окружностями общей точки. Это произойдёт в двух случаях.

По рисунку 57 видим, что при этом $a = 2$ или $a = -4$. Проверим, что при этих значениях действительно прямая касается окружности.

1) $a = 2$, тогда прямая $y = x + 1$ и окружность $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2$ имеют одну общую точку, потому что соответствующая им система уравнений $\begin{cases} x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2, \\ y = x + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение $(3; 4)$.

2) $a = -4$, тогда прямая $y = -x - 3$ и окружность $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 2$ имеют одну общую точку, потому что соответству-

ющая им система уравнений $\begin{cases} (x+4)^2 + (y-3)^2 = 2, \\ y = -x - 3 \end{cases}$

имеет единственное решение $(-5; 2)$.

Ответ: -4; 2.

19. а) Очевидно, что сумма 96 чисел
$(-47 - 46 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 46 + 47) + 48$ равна 48, и понятно, что 0 записан на 48-й странице тетради.

б) Если 0 записан на первой странице, то сумма 96 чисел $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 94 + 95$ равна 4 560. В этом нетрудно убедиться, используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

в) Рассмотрим таблицу, в первой строке которой записаны номера страниц по фабричной нумерации, а во второй строке номера, записанные мальчиком.

1	2	...	k	$k+1$	$k+2$	...	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	...	95	96
$-k$	$-(k-1)$	...	-1	0	1	...	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	$94-k$	$95-k$

$2k+1$ чисел $\qquad$ $95-2k$ чисел

Сумма первых $2k+1$ чисел равна 0, сумму последних чисел, начиная с $k+1$ по $95-k$, можно найти с помощью формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии. Эта сумма равна $48(95 - 2k) = S$, которую нашел мальчик. Приравняв её к числу 1 968, получим уравнение $48(95-2k) = 1\,968$, поэтому $k = 27$. Число 0 мальчик записал на странице с номером $k + 1$, то есть на 28-й странице.

Ответ: а) 48; б) 1; в) 28.

Решение варианта 33

1. По условию на телефонный разговор затрачено $52 - 16 = 36$ (рублей). Так как 1 минута разговора стоит 1 рубль 20 копеек, то разговор длился $36 : 1{,}2 = 30$ (минут).

Ответ: 30.

2. Как видно из диаграммы, наибольшее число посетителей (30 000) было 1 раз 5 ноября.

Ответ: 5.

17.Зак. № 41

3. У точек $(3;7)$ и $(6;7)$ одинаковые ординаты, поэтому длина основания прямоугольника равна $6-3=3$. Аналогично, высота прямоугольника равна $11-7=4$. Значит, диагональ равна $\sqrt{3^2+4^2}=5$ (см. рис. 58).

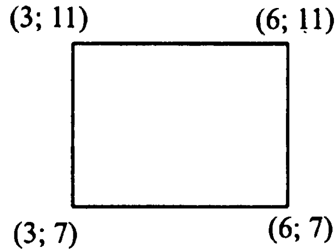


Рис. 58

Ответ: 5.

4. Вероятность выбора пристрелянного ружья равна $\frac{3}{12}$, при этом вероятность промаха равна $\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{10}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$.

Вероятность выбора непристрелянного ружья равна $\frac{9}{12}$, при этом вероятность промаха равна $\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{10}=\frac{72}{120}=\frac{12}{20}$.

Поэтому вероятность промаха в данной ситуации равна $\frac{1}{20}+\frac{12}{20}=\frac{13}{20}=\frac{65}{100}$.

Ответ: 0,65.

5. Так как $4=\log_3 3^4=\log_3 81$, то $\log_3(12-x)=\log_3 81$, $12-x=81$. Отсюда $x=-69$.

Ответ: -69.

6. Рассмотрим рисунок 59.

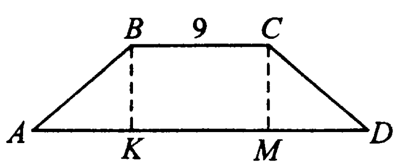


Рис. 59

$BK \perp AD$ и $CM \perp AD$, тогда $AK = MD = \dfrac{53-9}{2} = 22$.

$\dfrac{BK}{AK} = \operatorname{tg}\angle BAK = \dfrac{6}{11}$, поэтому $BK = AK \cdot \dfrac{6}{11} = 22 \cdot \dfrac{6}{11} = 12$.

Ответ: 12.

7. По формуле Ньютона–Лейбница $S = F(-1) - F(-5)$.

$F(-1) = (-1)^3 + 18 \cdot (-1)^2 + 221 \cdot (-1) - \dfrac{1}{2} = -204 - \dfrac{1}{2}$.

$F(-5) = (-5)^3 + 18 \cdot (-5)^2 + 221 \cdot (-5) - \dfrac{1}{2} = -125 + 450 - 1\,105 - \dfrac{1}{2} =$
$= -780 - \dfrac{1}{2}$.

$F(-1) - F(-5) = -204 - \dfrac{1}{2} - \left(-780 - \dfrac{1}{2}\right) = 576$.

Ответ: 576.

8. Рассмотрим рисунок 60.

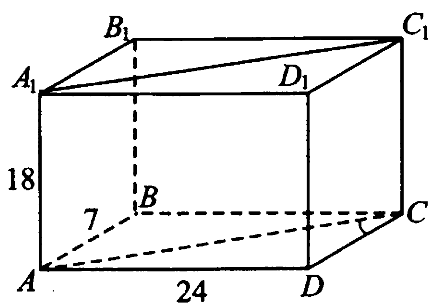


Рис. 60

Угол между прямыми DC и A_1C_1 совпадает с углом между прямыми DC и AC, так как $AC \parallel A_1C_1$.

$\sin\angle ACD = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{24}{\sqrt{24^2+7^2}} = \dfrac{24}{\sqrt{625}} = \dfrac{24}{25} = 0{,}96$.

Ответ: 0,96.

9. Так как $\dfrac{9a+b}{3a-2b}=4$, то $\dfrac{9\cdot\frac{a}{b}+1}{3\cdot\frac{a}{b}-2}=4.$

Пусть $\dfrac{a}{b}=x$, тогда $\dfrac{9x+1}{3x-2}=4,\ 9x+1=12x-8,\ 3x=9,\ x=3,$ $\dfrac{a}{b}=3.$

Ответ: 3.

10. Из формулы $v=\sqrt{2la}$ получаем, что $a=\dfrac{v^2}{2l}$. Но по условию $l=3$, $v=60$, поэтому $a=\dfrac{60^2}{2\cdot 3}=\dfrac{3\,600}{6}=600.$

Ответ: 600.

11. Пусть x (м^2) — планируемая норма укладки в день. Тогда, согласно условию, получаем:

$$\frac{320}{x}-\frac{320}{x+6}=12,\ \frac{320(x+6)-320\cdot x}{x(x+6)}=12,$$

$$\frac{320\cdot 6}{x(x+6)}=12,\ \frac{160}{x(x+6)}=1,\ x^2+6x-160=0,$$

$$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9+160}=-3\pm 13.$$

Так как x не является отрицательным числом, то $x=10$.

Ответ: 10.

12. Областью определения функции является множество $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Находим все значения x, при которых производная $y'=0$.

$$y'=-\frac{48}{x^2}+3,\ -\frac{48}{x^2}+3=0,\ -\frac{48+3x^2}{x^2}=0,$$

$$-48+3x^2=0,\ x^2=16,\ x=\pm 4.$$

Укажем знак производной (см. рис. 61)

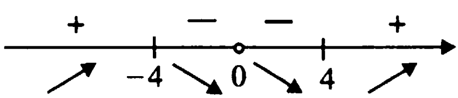


Рис. 61

18*

Отметим, что знак производной совпадает со знаком $-48 + 3x^2$, так как $x^2 > 0$.

Так как $y' < 0$ при $0 < x < 4$, то функция на промежутке $(0; 4)$ убывает, а так как $y' > 0$ при $x > 4$, то функция на промежутке $(4; +\infty)$ возрастает.

$x = 4$ — точка минимума функции.

Ответ: 4.

13. а) $2\sin x + |\cos x| - 3\cos x = 0$

1. $\cos x \geqslant 0$, тогда $|\cos x| = \cos x$ и уравнение примет вид
$2\sin x + \cos x - 3\cos x = 0$,
$2\sin x - 2\cos x = 0$, $\sin x = \cos x$.
При $\cos x \neq 0$ имеем $\operatorname{tg} x = 1$,

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Учитывая, что $\cos x \geqslant 0$, $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

2. $\cos x < 0$, тогда $|\cos x| = -\cos x$ и уравнение примет вид
$2\sin x - \cos x - 3\cos x = 0$,
$2\sin x - 4\cos x = 0$, $\sin x = 2\cos x$.
При $\cos x \neq 0$ $\operatorname{tg} x = 2$,
$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$.
Учитывая, что $\cos x < 0$, $x = \pi + \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, k \in Z$ или
$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi(1 + 2k), k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 62) отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

$x_1 = 2\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{4}$, $x_2 = \pi + \operatorname{arctg} 2$.

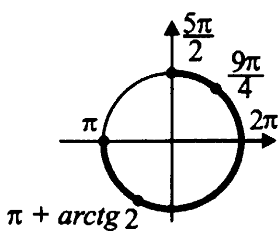


Рис. 62

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi(1 + 2k), k \in Z$; б) $\pi + \operatorname{arctg} 2$; $\dfrac{9\pi}{4}$.

14. а) В треугольнике BSC проведём высоту BE. Соединим точки B, E и F (см. рис. 63). $\triangle BEF$ — искомое сечение.

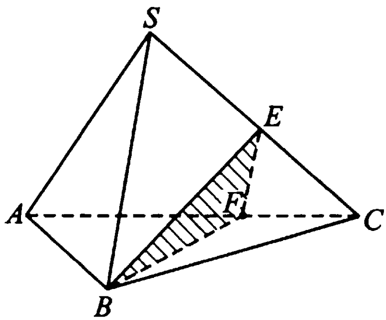


Рис. 63

б) 1. Изобразим тетраэдр так, как показано на рисунке 64. Пусть AO — высота правильного тетраэдра $ABCS$, $AO \perp (BCS)$. Так как тетраэдр правильный, то O — центр описанной окружности $\triangle BCS$, CO — её радиус, $CO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, где $a = 12$ — сторона правильного треугольника SBC, $CO = 4\sqrt{3}$.

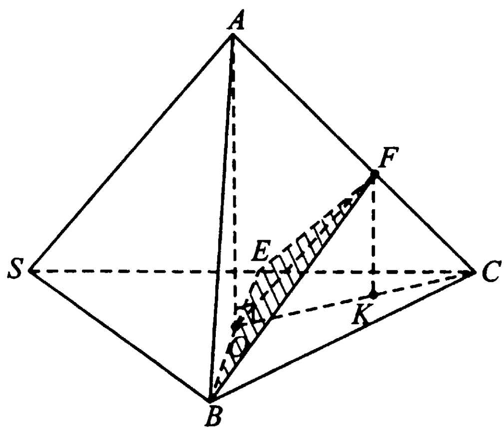


Рис. 64

2. $\triangle CAO$ — прямоугольный, $\angle AOC = 90°$. По теореме Пифагора $AO = \sqrt{AC^2 - CO^2} = \sqrt{144 - 48} = 4\sqrt{6}$.

3. Пусть $FK \perp CO$. Тогда $FK \parallel AO$, $AO \perp (BSC)$, следовательно, $FK \perp (BSC)$. Значит, FK — искомое расстояние.

4. Заметим, что $\triangle FCK \sim \triangle AOC$ по двум углам ($\angle FKC = \angle AOC = 90°$, $\angle C$ — общий), тогда $\dfrac{FK}{AO} = \dfrac{FC}{AC} = \dfrac{FC}{FC + AF}$.

Учитывая, что по условию $AF = 2FC$, получаем $\dfrac{FK}{AO} = \dfrac{FC}{FC + 2FC} = \dfrac{1}{3}$;

$FK = \dfrac{AO}{3} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

15. $\dfrac{(3^x - 27)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 5})(|x+2| - |x|)} \geqslant 0.$

ОДЗ. $\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1, \\ x^2 + x \geqslant 0, \\ x^2 + x \neq x^2 + 5, \\ |x+2| \neq |x|; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x \leqslant -1, \end{array}\right. \\ x \neq 5, \\ x^2 + 4x + 4 \neq x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 5. \end{cases}$

$x \in (1; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству

$\dfrac{(x-3)(x-1-1)(x-3)}{(x^2 + x - x^2 - 5)((x+2)^2 - x^2)} \geqslant 0$ (см. рис. 65),

$\dfrac{(x-3)^2(x-2)}{(x-5)(4x+4)} \geqslant 0,$

$\dfrac{(x-3)^2(x-2)}{(x-5)(x+1)} \geqslant 0,$

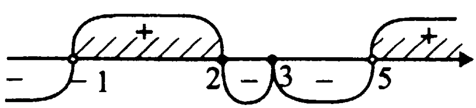


Рис. 65

$x \in (-1; 2] \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (1; 2) \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $(1; 2) \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$.

16. а) Окружность с центром в точке O_1 описана около четырёхугольника $BMNC$, значит, $\angle BCN + \angle BMN = 180°$, $\angle BMN = 180° - \angle BCN$. $\angle AMN + \angle BMN = 180°$ как смежные, $\angle BMN = 180° - \angle AMN$.

Отсюда $\angle BCN = \angle AMN$ (см. рис. 66).

Имеем в треугольниках ABC и ANM: $\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle NCB = \angle AMN$, значит, $\triangle ABC \sim \triangle ANM$ по первому признаку подобия, что и требовалось доказать.

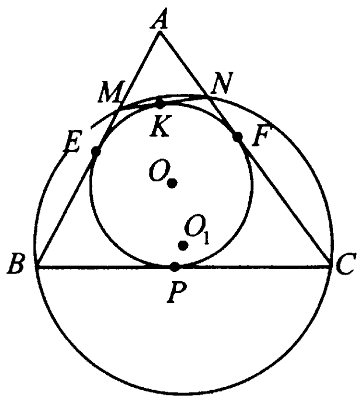


Рис. 66

б) Из подобия следует $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{BC}{MN}$.

Окружность с центром в точке O вписана в $\triangle ABC$, значит, $AF = AE$, $BE = BP$, $CP = CF$ как отрезки касательных, проведённых к окружности с центром O_1 из точек A, B и C соответственно.

Пусть $AF = AE = x$, тогда $BE = BP = 7 - x$, $CP = CF = 8 - x$, $BP + CP = BC$, $7 - x + 8 - x = 9$, $x = 3$, $AF = AE = 3$.

Обозначим $MK = t$, $NK = p$, тогда $ME = MK = t$, $NF = NK = p$ как отрезки касательных, проведённых к окружности с центром O из точек M и N соответственно.

Получим $AM = AE - ME = 3 - t$,
$AN = AF - NF = 3 - p$, $MN = MK + NK = t + p$.

Периметр $\triangle AMN$ равен $AM + AN + MN = 3 - t + 3 - p + t + p = 6$. Периметры подобных треугольников относятся так же, как их стороны, поэтому $\dfrac{6}{7+8+9} = \dfrac{MN}{9}$; $MN = \dfrac{54}{24} = 2{,}25$.

Ответ: 2,25.

17. Примем объём бассейна за единицу. По условию первая труба наливает 20 м^3 воды в час, вторая — $(20 - 2z)$ м^3, а третья — $(20 + 10z)$ м^3. Работая вместе, первая и вторая трубы наливают $(20 + 20 - 2z)$ м^3 $= (40 - 2z)$ м^3 воды в час, а работая вместе, все три трубы наливают $20 + (20 - 2z) + (20 + 10z)$ м^3 $= (60 + 8z)$ м^3 воды в час. Так как 20% составляют 0,2 бассейна, то первая и вторая трубы, работая вместе, затратят $\frac{0{,}2}{40 - 2z}$ часов, а на оставшиеся 0,8 бассейна три трубы, работая вместе, затратят $\frac{0{,}8}{60 + 8z}$ часов.

Весь бассейн будет налит за $\left(\frac{0{,}2}{40 - 2z} + \frac{0{,}8}{60 + 8z}\right)$ часов.

Задача сводится к нахождению такого значения z, при котором значение функции $t(z) = \frac{0{,}2}{40 - 2z} + \frac{0{,}8}{60 + 8z}$, $0 < z < 10$ будет наименьшим.

$$t'(z) = \frac{0{,}4}{(40 - 2z)^2} - \frac{6{,}4}{(60 + 8z)^2} = \frac{0{,}4(60 + 8z)^2 - 6{,}4(40 - 2z)^2}{(40 - 2z)^2 \cdot (60 + 8z)^2}.$$

$$t'(z) = 0, \begin{cases} 0{,}4(60 + 8z)^2 - 6{,}4(40 - 2z)^2 = 0, \\ 40 - 2z \neq 0, \\ 60 + 8z \neq 0, \\ 0 < z < 10. \end{cases}$$

$(60 + 8z)^2 - 16(40 - 2z)^2 = 0$

$3\,600 + 960z + 64z^2 - 25\,600 + 2\,560z - 64z^2 = 0$

$3\,520z = 22\,000$, $z = 6{,}25$. $6{,}25 \in (0; 10)$.

$t'(z) < 0$ при $z < 6{,}25$ и $t'(z) > 0$ при $z > 6{,}25$, значит, $z = 6{,}25$ — точка минимума функции $t(z)$.

Быстрее всего бассейн наполнится при $z = 6{,}25$.

Ответ: 6,25.

18. Неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a, \\ x^2 + 3x - 3a - 7x + 2a \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x^2 - 3x + 3a - 7x + 2a \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a, \\ x^2 - 4x - a \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x^2 - 10x + 5a \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \leqslant x, \\ a \geqslant x^2 - 4x; \end{cases} \\ \begin{cases} a > x, \\ a \leqslant -\dfrac{x^2}{5} + 2x. \end{cases}\end{array}\right.$$

В системе координат Oxa построим графики функций $a = x$, $a = x^2 - 4x$, $a = -\dfrac{x^2}{5} + 2x$ (см. рис. 67).

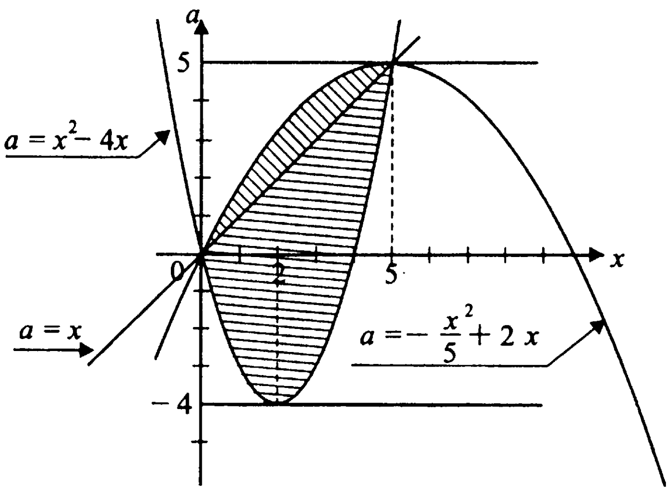


Рис. 67

Полученной совокупности удовлетворяют точки, заключённые между графиками функций $a = x^2 - 4x$ и $a = -\dfrac{x^2}{5} + 2x$ на промежутке $x \in [0; 5]$ (заштрихованная область).

По графику определяем: исходное неравенство имеет единственное решение при $a = -4$ и $a = 5$, так как в заштрихованной области будет единственная точка с ординатой a, равной -4 и равной 5.

Ответ: -4; 5.

19. а) Введём на клетках систему координат (как показано на рисунке 68 а)). Изначально «Кентавр» стоит в клетке (1; 1). Тогда последовательность ходов (см. рис. 68 б)) $(1; 1) \to (2; 3) \to (4; 2) \to (2; 1)$ приведёт его в клетку (2; 1), соседнюю с начальной. По сути ход «Кентавра» совпадает с ходом обычного шахматного коня.

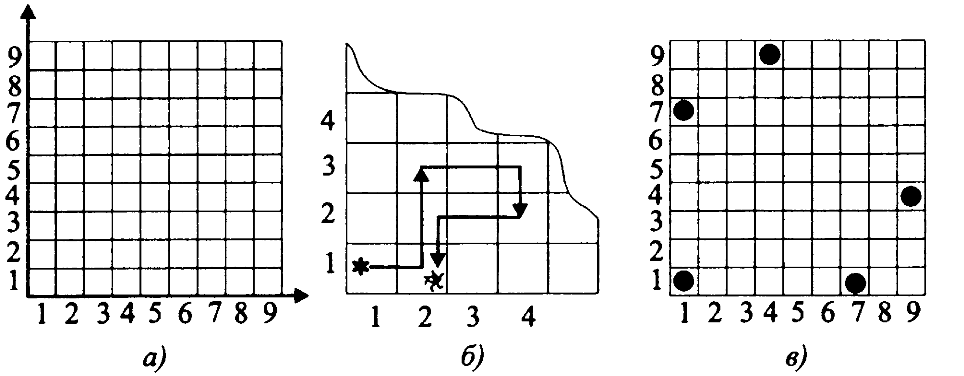


Рис. 68

б) Не может. Если «Кентавр» стоит в клетке $(i; j)$, то после хода он окажется в одной из клеток $(i \pm 1; j \pm 3)$ или $(i \pm 3; j \pm 1)$. Таким образом, сумма координат станет равной одному из чисел $i + j - 4$, $i + j - 2$, $i + j + 2$, $i + j + 4$, то есть изменится на чётное число по сравнению со значением $i+j$. Значит, чётность суммы координат клетки, на которой стоит «Кентавр», остаётся неизменной. Сначала «Кентавр» стоит на клетке $(1; 1)$. Следовательно, сумма координат занимаемой клетки всегда будет чётной, в то время как соседние с начальной клетки $(1; 2)$ и $(2; 1)$ имеют нечётную сумму координат.

в) Очевидно, что $k \leqslant 8$, иначе «Кентавр» первым же ходом выскочит за доску. Ясно, что для чётных k требуемое невозможно, так как в этом случае «Кентавр» всегда будет оказываться в клетках с чётной суммой координат и никогда не сможет попасть ни в клетку $(1; 2)$, ни в клетку $(2; 1)$. Кроме того, при $k > 4$ после первого хода «Кентавр» окажется либо в клетке $(9; k+1)$, либо в клетке $(k+1; 9)$ и следующим ходом вынужден будет вернуться в клетку $(1; 1)$, так как $2k+1 > 9$ и, следовательно, у него не будет выбора. Тогда все клетки, на которых может побывать «Кентавр», исчерпываются клетками $(1; 1)$, $(k + 1; 9)$ и $(9; k + 1)$, то есть в соседней с начальной клетке «Кентавр» никогда не окажется.

Предположим, что $k = 3$. Тогда после первого хода «Кентавр» окажется в клетке $(9; 4)$ или $(4; 9)$. Будем считать, что он окажется в клетке $(9; 4)$, так как второй случай полностью симметричен. Из клетки $(9; 4)$ вторым ходом он может либо вернуться в начальную, либо перейти в клетку $(1; 7)$, из которой следующим ходом можно лишь вернуться в клетку $(9; 4)$. Значит, при $k = 3$ «Кентавру» доступны только клетки $(1; 1)$, $(9; 4)$, $(1; 7)$, $(4; 9)$, $(7; 1)$, и этот случай не подходит (см. рис. 68 в).

Наконец, при $k = 1$ требуемое возможно, что доказывается примером последовательности шагов, приводящих «Кентавра» в соседнюю клетку $((1;1) \to (2;9) \to (3;1) \to (4;9) \to (5;1) \to (6;9) \to (7;1) \to (8;9) \to$ $\to (9;1) \to (1;2))$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 1.

Решение варианта 37

1. Пусть x — сумма, которую Варя должна положить на счёт, тогда по условию $0{,}85x \geqslant 400$, $x \geqslant \dfrac{40\,000}{85}$, $x > 470$. Минимальное число, кратное 10 и удовлетворяющие неравенству $x > 470$, равно 480.

Ответ: 480.

2. Из графика следует, что температура 60° достигается через 4 минуты после запуска двигателя, а температура 90° — через 6 минут после запуска двигателя. Поэтому от температуры 60° до температуры 90° двигатель прогрелся за $6 - 4 = 2$ (минуты).

Ответ: 2.

3. Диаметр окружности, вписанной в квадрат, равен стороне квадрата (см. рис. 69).

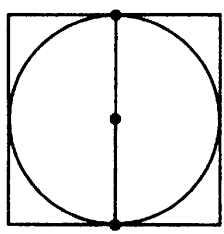


Рис. 69

Из рисунка, на котором в условии задачи изображён квадрат, делаем вывод, что сторона квадрата равна 5-ти диагоналям квадрата со стороной $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 70).

По теореме Пифагора $d = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = 1.$

Значит, сторона квадрата равна 5, а радиус окружности равен 2,5.

Ответ: 2,5.

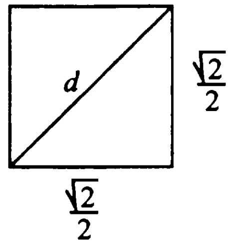


Рис. 70

4. Так как 18 сентября погода хорошая, то 19 сентября с вероятностью 0,6 погода хорошая, а с вероятностью 0,4 отличная.

Согласно условию, если 19 сентября погода хорошая, то 20 сентября вероятность хорошей погоды (как вероятность произведения) будет равна $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$, а вероятность отличной погоды равна $0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$.

Аналогично, если 19 сентября погода отличная, то с вероятностью $0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$ она будет отличной и 20 сентября. Хорошей 20 сентября погода в этом случае будет с вероятностью $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Далее, рассуждая аналогично, получаем рисунок 71.

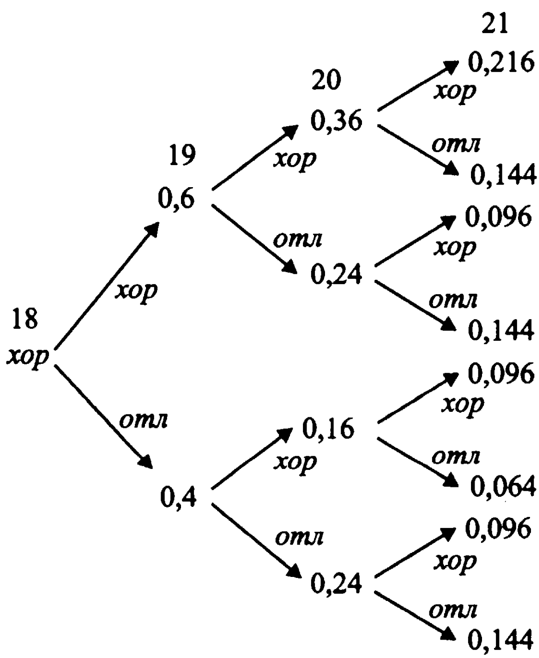


Рис. 71

Вероятность отличной погоды 21 сентября будет (как вероятность суммы) равна $0{,}144 + 0{,}144 + 0{,}064 + 0{,}144 = 0{,}496$.

Ответ: 0,496.

5. Согласно определению логарифма $x - 7 > 0$ и $x - 7 \neq 1$, тогда $x > 7$ и $x \neq 8$.

Так как $2 = \log_{x-7}(x-7)^2$ при $x > 7$ и $x \neq 8$, то получаем уравнение $\log_{x-7} 81 = \log_{x-7}(x-7)^2$.

Поэтому $(x-7)^2 = 81$, $x - 7 = \pm 9, x_1 = 16, x_2 = -2$.

$x_2 = -2$ решением не является, так как $x > 7$.

Ответ: 16.

6. Известно, что радиус r окружности, вписанной в треугольник, вычисляется по формуле $r = \dfrac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр (см. рис. 72).

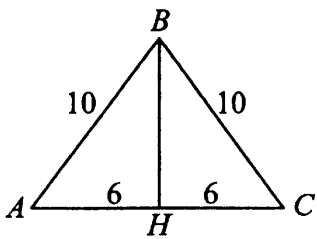


Рис. 72

Пусть BH медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, тогда BH является высотой. По теореме Пифагора $BH = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$. $S = \dfrac{1}{2}a \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$,

$p = \dfrac{10 + 10 + 12}{2} = 16$, $r = \dfrac{48}{16} = 3$.

Ответ: 3.

7. Касательная $y = 5x + 17$ к параболе $y = 12x^2 + bx + 20$ имеет с параболой единственную общую точку. Поэтому квадратное уравнение $5x + 17 = 12x^2 + bx + 20$ имеет единственное решение. Тем самым, дискриминант этого квадратного уравнения равен 0.

Преобразуем уравнение $5x + 17 = 12x^2 + bx + 20$ к стандартному виду $12x^2 + (b-5)x + 3 = 0$.

$D = (b-5)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 3 = 0$, $(b-5)^2 = 144$, $b - 5 = \pm 12$,

$b_1 = 17,\ b_2 = -7.$

При $b = 17$ абсциссу точки касания находим из уравнения $12x^2 + (b-5)x + 3 = 0,\ 12x^2 + 12x + 3 = 0.$

Решая уравнение, получаем $x = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < 0$, поэтому $b = 17$ не является искомым.

При $b = -7$ получаем уравнение $12x^2 - 12x + 3 = 0,\ x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} > 0.$ Значит, при $b = -7$ абсцисса точки касания положительна.

Ответ: -7.

8. Поверхность куба состоит из 6 граней, каждая из которых является квадратом, поэтому $S_{\text{пов. куба}} = 6a^2$, где a — ребро куба.

По условию

$6(a+3)^2 - 6a^2 = 306,\ (a+3)^2 - a^2 = 51,\ (a+3-a)(a+3+a) = 51,$ $3 \cdot (a+3+a) = 51,$

$2a + 3 = 17,\ a = 7.$

Ответ: 7.

9. Заметим, что $\sqrt{k} = \sqrt[24]{k^{12}},\ \sqrt[8]{k} = \sqrt[24]{k^3}$, поэтому

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt[24]{k} \cdot \sqrt[8]{k}} = \sqrt[24]{\frac{k^{12}}{k \cdot k^3}} = \sqrt[24]{\frac{k^{12}}{k^4}} = \sqrt[24]{k^8} = \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{343} = 7.$$

Ответ: 7.

10. По условию искомая частота $\omega < 420$, поэтому $420^2 - \omega^2 > 0$, $|420^2 - \omega^2| = 420^2 - \omega^2$.

Кроме того, согласно условию,

$$\frac{A_0 \cdot 420^2}{420^2 - \omega^2} - A_0 \leqslant \frac{1}{24}A_0.$$

Так как $A_0 > 0$, то получаем неравенство

$$\frac{420^2}{420^2 - \omega^2} - 1 \leqslant \frac{1}{24},\ \frac{420^2}{420^2 - \omega^2} \leqslant 1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}.$$

Отсюда, $420^2 \cdot 24 \leqslant 420^2 \cdot 25 - \omega^2 \cdot 25$,

$420^2 \cdot 25 - 420^2 \cdot 24 \geqslant \omega^2 \cdot 25$,

$420^2(25 - 24) \geqslant \omega^2 \cdot 25$,

$420^2 \geqslant \omega^2 \cdot 25$,

$$\omega^2 \leqslant \frac{420^2}{5^2} = \left(\frac{420}{5}\right)^2,\ \omega \leqslant 84.$$

Максимальное значение $\omega = 84$.

Ответ: 84.

11. На рисунке 73 указаны расположения сухогрузов в тот момент, когда второй сухогруз находился позади первого и расстояние от кормы первого до носа второго было 500 м, а так же их расположение через 13 минут (заметим, что 13 минут$=\dfrac{13}{60}$ часа).

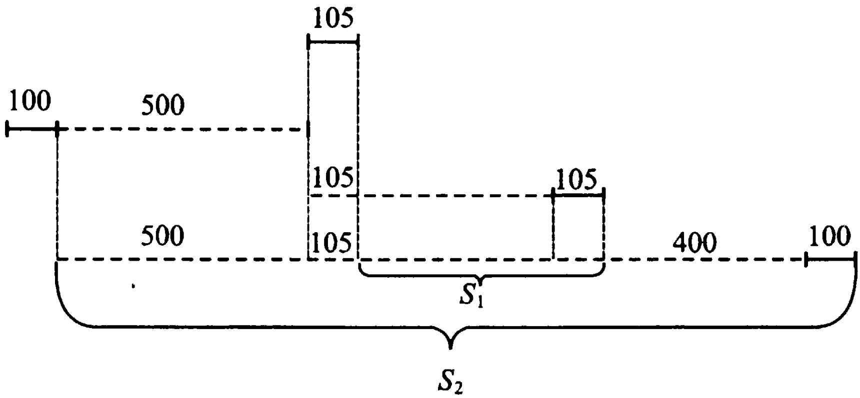


Рис. 73

S_1 — расстояние (в м), которое прошёл первый сухогруз за 13 минут,
S_2 — расстояние (в м), которое прошёл второй сухогруз за 13 минут.
Тогда $S_2 = 500 + 105 + S_1 + 400 + 100 = S_1 + 1\,105$.
Значит, $S_2 - S_1 = 1\,105$.
Отсюда $\dfrac{S_2 - S_1}{\frac{13}{60}} = \dfrac{S_2}{\frac{13}{60}} - \dfrac{S_1}{\frac{13}{60}} = \dfrac{1\,105}{\frac{13}{60}}$.
Пусть v_2 и v_1 —скорости первого и второго сухогрузов.
$v_2 - v_1 = \dfrac{1\,105 \cdot 60}{13} = 85 \cdot 60 = 5\,100$ м/ч $= 5{,}1$ км/ч.
Ответ: 5,1.

12. Находим производную: $y' = -\dfrac{1 \cdot (x^2 + 961) - x \cdot 2x}{(x^2 + 961)^2} = \dfrac{x^2 - 961}{(x^2 + 961)^2}$.

Решаем уравнение $\dfrac{x^2 - 961}{(x^2 + 961)^2} = 0$, $x^2 - 961 = 0$, $x^2 = 961$, $x = \pm 31$.

Так как у дроби $\dfrac{x^2 - 961}{(x^2 + 961)^2}$ знаменатель больше нуля, то её знак совпадает со знаком числителя дроби, являющегося квадратным трёхчленом $x^2 - 961$ (см. рис. 74).

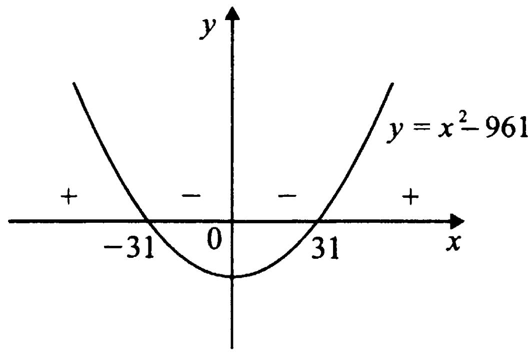


Рис. 74

Таким образом, при $y < -31$ функция возрастает, а при $-31 < x < 31$ убывает, а при $x > 31$ опять возрастает (см. рис. 75).

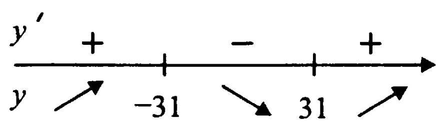


Рис. 75

В точке $x = -31$ будет максимум.

Ответ: -31.

13. а) Преобразуем обе части уравнения, получим $7^{\sin 2x} = 7^{2\cos x}$, откуда $\sin 2x = 2\cos x$;

$2\sin x \cos x = 2\cos x$; $2\cos x(\sin x - 1) = 0$. Таким образом, либо $\cos x = 0$ и тогда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, либо $\sin x = 1$, тогда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. Заметим, что вторая серия решений полностью входит в первую, отсюда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

б) Заметим, что $\pi < 4$ и поэтому при $k = 0$ и при $k = -1$ $x = \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, соответственно, $0 < \frac{\pi}{2} < \frac{4}{2} = 2$, $0 > -\frac{\pi}{2} > -\frac{4}{2} > -2$. Таким образом, $x = \pm\frac{\pi}{2}$ принадлежит рассматриваемому промежутку.

При $k \geqslant 1$ получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k > \frac{3}{2} + 3k \geqslant \frac{3}{2} + 3 > 4$,
x не принадлежит рассматриваемому промежутку.

При $k \leqslant -2$ получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi < -\frac{3 \cdot 3}{2} < -2$,
x не принадлежит рассматриваемому промежутку.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$; б) $\pm\frac{\pi}{2}$.

14. а) Пусть радиус основания равен r, O — центр основания (см. рис. 76).

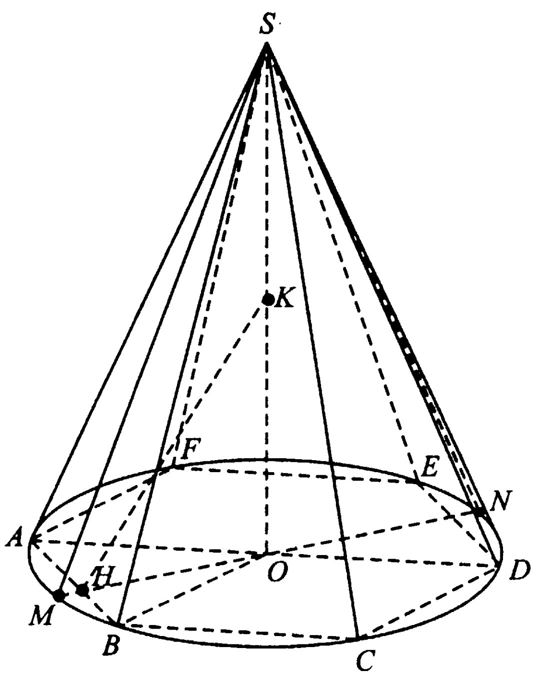


Рис. 76

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$, $OB = r$, $\angle BOA = 60°$, $\triangle AOB$ — равносторонний, его высота $OH = \frac{OB\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 77). Через прямую OH и высоту конуса OS проведём осевое сечение конуса (см. рис. 78), в сечении получим $\triangle SMN$.

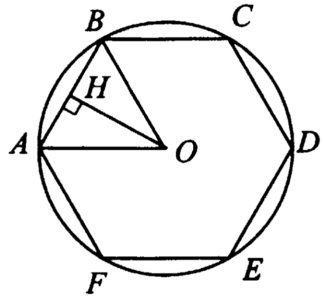


Рис. 77

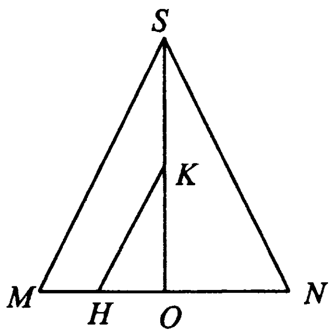


Рис. 78

Пусть K — середина OS. $\triangle SMN$ — равносторонний (так как образующая конуса равна диаметру его основания) со стороной $2r$. Тогда $SO = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$, $OK = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, $OK = OH$, следовательно, прямоугольный $\triangle OHK$ — равнобедренный, $\angle KHO = 45°$. Так как OH — проекция KH на плоскость основания конуса, $OH \perp AB$ по построению, то $KH \perp AB$ по теореме о трёх перпендикулярах, следовательно, $\angle KHO$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью основания конуса. Значит, двугранный угол равен 45°, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим шар, вписанный в конус и осевое сечение, описанное выше (см. рис. 79). В сечении шара плоскостью MSN получим окружность, центр которой в точке Q (точке пересечения медиан $\triangle MSN$) (см. рис. 80), $OQ : QS = \frac{1}{2}$, $OS = r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

$SQ = \frac{4}{3}\sqrt{3}$. $SK = \frac{1}{2}OS = \sqrt{3}$, $QK = SQ - SK = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

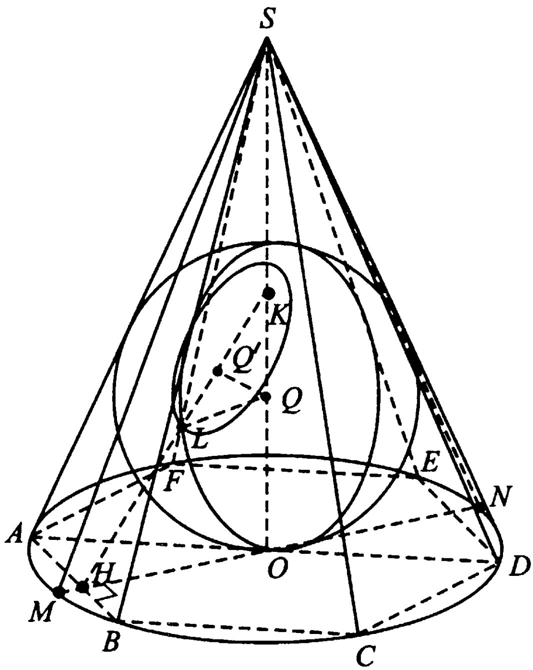


Рис. 79

$OQ = \frac{1}{3}SO = \frac{2\sqrt{3}}{3} = QL$ — радиус вписанного шара. Пусть $QQ' \perp HK$, тогда $\Delta KQQ'$ — прямоугольный и равнобедренный ($\angle QKQ' = 45°$), $QQ' = \frac{KQ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $Q'L^2 = QL^2 - (QQ')^2 = \frac{7}{6}$.

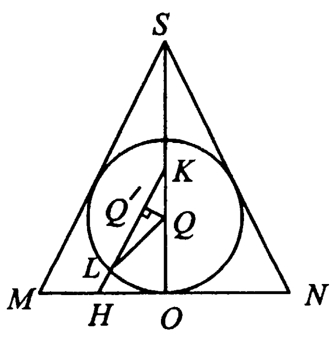


Рис. 80

$Q'L$ — радиус круга, полученного в сечении шара плоскостью α. Тогда площадь сечения равна $\pi Q'L^2 = \dfrac{7}{6}\pi$.

Ответ: $\dfrac{7}{6}\pi$.

15. ОДЗ $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$, получим $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Тогда неравенство $x^2 - 6x + 8 > 0$ равносильно условию $x < 2$, $x > 4$.

ОДЗ примет вид $\begin{cases} x < 2, x > 4, \\ x > 1, \\ x \neq 2; \end{cases}$

$x \in (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

На ОДЗ преобразуем исходное неравенство, получим

$$\frac{\ln(x^2 - 6x + 8)}{\ln 15} \geqslant \frac{\ln(x^2 - 6x + 8)}{\ln(x - 1)};$$

$$\ln(x^2 - 6x + 8)\left(\frac{1}{\ln 15} - \frac{1}{\ln(x - 1)}\right) \geqslant 0,$$

$$\ln(x^2 - 6x + 8)\left(\frac{\ln(x - 1) - \ln 15}{\ln 15 \ln(x - 1)}\right) \geqslant 0,$$

$$\frac{\ln(x^2 - 6x + 8)\ln\dfrac{x - 1}{15}}{\ln 15 \ln(x - 1)} \geqslant 0.$$

Заметим, что $e > 1$, $15 > 1$, следовательно, $\ln 15 > 0$.

Отсюда $\dfrac{\ln(x^2 - 6x + 8)\ln\left(\dfrac{x - 1}{15}\right)}{\ln(x - 1)} \geqslant 0.$

На ОДЗ последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{((x^2 - 6x + 8) - 1)\left(\dfrac{x - 1}{15} - 1\right)}{(x - 1) - 1} \geqslant 0;$$

$\dfrac{(x^2 - 6x + 7)(x - 16)}{x - 2} \geqslant 0$ (1), так как знак $\ln f(x)$ совпадает со знаком $(f(x) - 1)$ на ОДЗ выражения $\ln f(x)$.

Решим уравнение

$x^2 - 6x + 7 = 0$, получим $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$.

Тогда неравенство (1) примет вид

$$\frac{(x-(3-\sqrt{2}))(x-(3+\sqrt{2}))(x-16)}{x-2} \geqslant 0.$$

Заметим, что $1 < \sqrt{2} < 2$, следовательно, $1 < 3-\sqrt{2} < 2$, $4 < 3+\sqrt{2} < 5$.

Воспользуемся методом интервалов (см. рис. 81), получим $x \in (-\infty; 3-\sqrt{2}] \cup (2; 3+\sqrt{2}] \cup [16; +\infty)$.

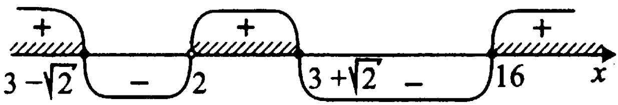


Рис. 81

С учётом ОДЗ запишем решение исходного неравенства: $x \in (1; 3-\sqrt{2}] \cup (4; 3+\sqrt{2}] \cup [16; +\infty)$.

Ответ: $(1; 3-\sqrt{2}] \cup (4; 3+\sqrt{2}] \cup [16; +\infty)$.

16. а) Докажем, что сумма длин диагоналей пятиугольника меньше удвоенного периметра.

Из неравенства треугольника следует, что $AC < AB + BC$, $BD < BC + CD$, $CE < CD + DE$, $AD < AE + DE$, $BE < AB + AE$ (см. рис. 82).

Отсюда сумма диагоналей

$AC + BD + CE + AD + BE < 2(AB + BC + CD + DE + AE)$.

б) По условию $\triangle BED$ — равносторонний, $AB = AE = BC = CD = \sqrt{3}$ (см. рис. 82), $\angle BAE = \angle ABC = \angle BCD$.

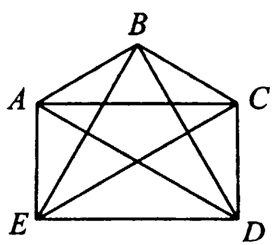


Рис. 82

Тогда $\angle BED = \angle BDE = \angle DBE = 60°$. Пусть $\angle AEB = \angle\alpha$. Тогда $\angle ABE = \alpha$, так как $\triangle ABE$ — равнобедренный. $\angle EAB = 180° - 2\alpha$. Но $\triangle AEB = \triangle ABC = \triangle BCD$ по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, $\angle CBD = \angle CDB = \alpha$, $\angle BCD = 180^\circ - 2\alpha$. $\angle ABC = 2\alpha + 60^\circ$. Следовательно, $60^\circ + 2\alpha = 180^\circ - 2\alpha$, $\alpha = 30^\circ$.

$\angle AED = \angle CDE = \alpha + 60^\circ$ $\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$, $\angle AED = \angle CDE = \alpha + 60^\circ = 90^\circ$. В $\triangle BAE$ (см. рис. 82) по теореме косинусов $BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos\angle BAE = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - -2\sqrt{3}\sqrt{3}\cos 120^\circ = 6 + 3 = 9$, $BE = 3$.

Значит, $BE = AC = BD = 3$.

В $\triangle CDE$ по теореме Пифагора $CE^2 = DE^2 + CD^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 12$, $CE = 2\sqrt{3}$. Аналогично, $AD = 2\sqrt{3}$. Сумма длин диагоналей равна $3 + 3 + 3 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9 + 4\sqrt{3}$.

Ответ: $9 + 4\sqrt{3}$.

17. Пусть в магазин завезли n пособий, тогда по математике было завезено $\dfrac{8}{9+8+7}n = \dfrac{n}{3}$ пособий. Через неделю осталось 40 % пособий, то есть $0{,}4n$. Из них по математике было $\dfrac{1}{3+1+2} \cdot 0{,}4n = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{5}n = \dfrac{n}{15}$ пособий. Отсюда продано было $\dfrac{n}{3} - \dfrac{n}{15} = \dfrac{4n}{15}$ пособий по математике, что составляет $\dfrac{\frac{4n}{15}}{\frac{n}{3}} \cdot 100\,\% = \dfrac{4}{5} \cdot 100\,\% = 80\,\%$ от их начального количества.

Ответ: 80.

18. Рассмотрим неравенство $\sqrt{(x-y)^2} \geqslant x + y$. Подкоренное выражение неотрицательно для всех значений x и y. Это неравенство выполнено при $x + y \leqslant 0$ и при $(\sqrt{(x-y)^2})^2 \geqslant (x+y)^2$, в первом случае $y \leqslant -x$, во втором $x^2 + y^2 - 2xy \geqslant x^2 + y^2 + 2xy$, $xy \leqslant 0$, то есть либо числа x и y разных знаков, либо хотя бы одно из них равно нулю. Изобразим штриховкой множество решений этого неравенства на плоскости Oxy (см. рис. 83).

Так как $16^{a-1} > 0$, второе уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(a^2; 6a - 8)$ и радиусом $\sqrt{16^{a-1}} = 4^{a-1}$.

Поэтому система имеет ровно два решения лишь в том случае, когда эта окружность вписана в I координатный угол. Но тогда центр окружности лежит на биссектрисе I координатного угла, а значит, на прямой $y = x$ при $x > 0$. Отсюда $a^2 = 6a - 8$, $a^2 > 0$, то есть $a^2 - 6a + 8 = 0$, $a \neq 0$, следовательно, $a = 2$ или $a = 4$. Если $a = 2$ или $a = 4$, то окружность будет касаться стороны I координатного угла в том и только в том случае, когда радиус R окружности равен абсциссе центра окружности, то есть $a^2 = 4^{a-1}$. При $a = 2$ получим $a^2 = 4$, $4^{a-1} = 4$. При $a = 4$ получим

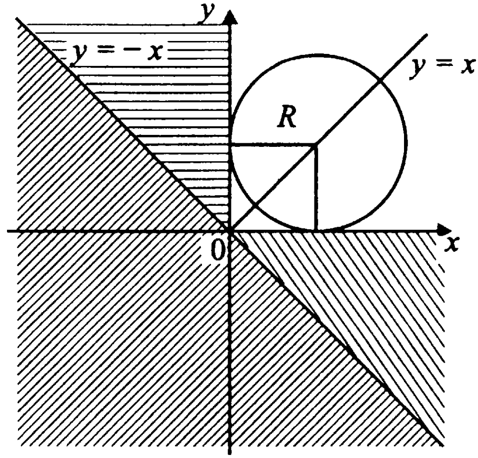


Рис. 83

$a^2 = 16$, $4^{a-1} = 64$. Таким образом, $a = 2$ — единственное подходящее значение.

Ответ: 2.

19. а) Первые простые числа 2, 3, 5, 7. Таким образом, при $n \geqslant 7$ число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot \ldots \cdot n$ делится на 2, 3, 5, 7, то есть имеет не менее 4 простых делителей. При $n = 6$ получим, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6$ делится на 2, 3, 5 и не имеет других простых делителей. Значит, 6 — искомое значение n.

б) Ясно, что $512 = 2^9$. Заметим, что максимальная степень двойки, на которую делится $n!$ равна сумме степеней двоек, входящих в разложение на простые множители чисел $k \leqslant n$. Тогда 2! делится на 2^1, 4! – на 2^3, 6! — на 2^4, 8! — на 2^7, 10! — на 2^8, 12! — на $2^{10} > 512$. Таким образом, 12! делится на 512, а 11! — нет. Значит, 11 — искомое значение n.

в) $0 < \dfrac{(n!)^2}{4} - 90n! + 3201 \leqslant 7^4$. Пусть $n! = t$.

Тогда $0 < t^2 - 360t + 12\,804 \leqslant 9604$. Решим неравенство $t^2 - 360t + 12\,804 \leqslant 9604$, $t^2 - 360t + 3200 \leqslant 0$.

Получим $180 - \sqrt{29\,200} \leqslant t \leqslant 180 + \sqrt{29\,200}$. Так как t является натуральным числом, то $9 < t < 351$.

Решим неравенство $t^2 - 360t + 12\,804 > 0$. Получим, что либо $t < 180 - \sqrt{19\,596}$, либо $t > 180 + \sqrt{19\,596}$. Так как t является натуральным числом, то либо $t \leqslant 40$, либо $t \geqslant 320$.

Получаем, что либо $9 < t \leqslant 40$, либо $320 \leqslant t < 351$.

Так как $t = n!$, $5! = 120$ и $6! = 720$, то t не может удовлетворять неравенству $319 \leqslant t < 351$.

Рассматривая неравенство $9 < n! < 40$, получаем, что наибольшее значение n, удовлетворяющее этому неравенству, равно 4, так как $4! = 24$, а $5! = 120$.

Ответ: а) 6; б) 11; в) 4.

Глава III. Справочник

Предлагаемый справочник содержит основные результаты и формулы, предусмотренные действующей программой для общеобразовательных учреждений. В основу отбора материала положен курс B, по которому разрабатывались КИМы 2002 – 2014 годов. Однако как при подготовке к ЕГЭ, так и при его сдаче учащимся понадобятся сведения, которые требуют значительных усилий при их доказательстве, выводе, исследовании. Они не входят в нормативные рамки курса B, но большинство из них включено в курс углублённого изучения математики и отмечено звёздочкой (*).

§ 1. Условные обозначения

При изложении теоретического материала, содержащегося в этой главе, мы будем пользоваться следующими общепринятыми математическими обозначениями.

N — множество всех натуральных чисел.

N_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.

Z — множество всех целых чисел.

Q — множество всех рациональных чисел.

R — множество всех действительных (вещественных) чисел.

R^+ — множество всех положительных действительных чисел.

$\Rightarrow$ — следует.

$\Leftrightarrow$ — равносильно; эквивалентно; тогда и только тогда.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно.

$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.

$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$.

const — постоянная величина.

$\in$ — принадлежит, содержится; например:

$x \in R$ — x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.

$n \,\vdots\, m$ (для $n, m \in Z$) — число n делится нацело на число m.

§ 2. Степени и корни

Определение степени и корня

1. Пусть $a \in R, n \in N$. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}};$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \text{ если } a \neq 0;$$

$$0^0 \text{ не определено};$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ и } b \geqslant 0 \text{ при } n \text{ чётном};$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ при } n \text{ нечётном}.$$

2. Пусть $a \in R^+; m \in Z, n \in N, n > 1$. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами

Пусть $m, n, k \in N, m, n > 1;\ a, b \in R^+$. Тогда

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Правила действий со степенями

Пусть $p, q \in Q,\ a, b \in R^+$. Тогда

$$a^p a^q = a^{p+q}; \qquad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \qquad (ab)^p = a^p b^p.$$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведённые правила верны и для $p,\ q \in R$.

Формулы сокращённого умножения

Пусть $a, b \in R$. Тогда

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Таблица квадратов

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$	$26^2 = 676$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$	$27^2 = 729$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$	$28^2 = 784$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$	$29^2 = 841$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$	$30^2 = 900$

§ 3. Модуль и его свойства

1. Определение модуля числа.

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad |x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчёта — точки O.

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0; \quad {}^{*}|x^n| = |x|^n, n \in Z, \left[\begin{array}{l} x \neq 0, \\ n > 0. \end{array}\right.$$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d, a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2*. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_{n+1} = b_n q, b_1 \neq 0, q \neq 0; \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2*. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \frac{b_1}{1-q}$.

§ 5. Логарифмы

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа x по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени y, в которую нужно возвести a, чтобы получить число x: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ для } x > 0.$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|, xy > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a|x| - \log_a|y|, xy > 0;$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a x^\alpha = \alpha\log_a x, x > 0;$$
$$\log_a x^k = k\log_a|x|, k \text{ — чётное целое.}$$

3. Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Тогда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ в частности } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \text{ при } x \neq 1.$$

Кроме того, $\log_a x \log_b y = \log_a y \log_b x$.

4. Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, тогда

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b, p \neq 0;$$
$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_{|a|} b, k \neq 0, k \text{ — чётное целое.}$$

5*. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

При решении задач бывает полезна следующая теорема.

Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

§ 6. Теория вероятностей

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A.

Противоположные события

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1; \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B.

Событие C называют объединением событий A и B (пишут $C = A \cup B$), если событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что произошли оба события A и B.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

§ 7. Тригонометрия

Радианное измерение углов

Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$
$$^{*}\ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \qquad ^{*}\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \qquad ^{*}\ \operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, то

$$^{*}\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad ^{*}\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2\cdot\sin\frac{x\pm y}{2}\cdot\cos\frac{x\mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2};$$

$$^{*}\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^{*}\sin x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^{*}\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y};$$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а α определяется из формулы $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big);$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big);$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$$y \overset{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$y \overset{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ и } 0 \leqslant y \leqslant \pi;$$

19. Зак. № 41

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

***Свойства обратных тригонометрических функций**

$D(\arcsin x) = [-1; 1]$; $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$D(\arccos x) = [-1; 1]$; $E(\arccos x) = [0; \pi]$;

$D(\operatorname{arctg} x) = R$; $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$D(\operatorname{arcctg} x) = R$; $E(\operatorname{arcctg} x) = \left(0; \pi\right)$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $x \in [-1; 1]$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

$\sin(\arcsin x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arcsin(\sin x) = x_0$, где $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_0 = \sin x$;

$\cos(\arccos x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arccos(\cos x) = x_0$, где $x_0 \in [0; \pi]$ и $\cos x_0 = \cos x$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x_0$, где $x_0 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x_0$, где $x_0 \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} x_0 = \operatorname{ctg} x$.

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$;

$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a;\quad |a| \leqslant 1; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = 0;\quad x = \pi k; k \in Z;$

$\sin x = 1;\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = a; |a| \leqslant 1;\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\cos x = 0;\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z;$

$\cos x = 1;\quad x = 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi k; k \in Z;$

$\operatorname{tg} x = a;\quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n; n \in Z;$

$\operatorname{ctg} x = a;\quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; n \in Z.$

§ 8. Многочлены и их корни

Определение многочлена

Многочленом степени n ($n \in N_0$) называется всякое выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ и $a_n \neq 0$.

Всякое вещественное число, отличное от нуля, принято трактовать как многочлен нулевой степени. Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n — старший коэффициент, a_0 — свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен степени 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 — корни $f(x)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ \ x_1 x_2 = \frac{c}{a}\ \ \textbf{(Теорема Виета)}.$$

20.Зак. № 41

Если второй коэффициент делится на 2, то есть

$f(x) = ax^2 + 2kx + c$, то $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Если старший коэффициент равен 1, то есть $f(x) = x^2 + px + q$,

то $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом соответствующего многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x) = 0$). Дискриминант принято обозначать большой буквой D. Отметим, что $D = 0 \Leftrightarrow k^2 - ac = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

***Теорема Безу и схема Горнера**

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдётся такой многочлен степени $n - 1$

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) + f(x_0) \quad \textbf{(Теорема Безу)},$$

причём коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n,\ \ b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \ldots,\ b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \ldots$$
$$\ldots,\ b_1 = x_0 b_2 + a_2,\ b_0 = x_0 b_1 + a_1,\ f(x_0) = x_0 b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу **(схему Горнера)**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) \quad \textbf{(следствие из теоремы Безу)}.$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$.

Приведём еще одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) p/q является корнем многочлена $f(x)$, то

1) $a_n \,\vdots\, q$;

2) $a_0 \,\vdots\, p$.

Следствие. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0.

Эти теоремы будут очень полезными при выполнении некоторых заданий части В и части С, их использование существенно экономит время решения.

Пример 1. Найдите целые корни уравнения $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение. По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена: ± 1; ± 2. Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	−3	−2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
−1	1	3	2	0		корень
−1	1	2	0			корень (кратности 2)

$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x-1)(x+1)^2(x+2)$.

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; −1; −2, причём −1 — корень кратности 2.

Пример 2. Решите уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение. По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 \vdots q$, $3 \vdots p$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 6: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Видим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому проверяем числа -1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; -3; $-\frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
−1	6	11	9	5	−2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{4}$	не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x+\frac{1}{3}\right)(6x^3+15x^2+15x+9) = 0$. $x_1 = -\frac{1}{3}$; $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 2: ± 1; ± 2.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причём -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа -3; $-\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x+2)=0$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x^2+x+1=0$ — корней нет.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

§ 9. Уравнения

Уравнения с одним неизвестным

Напомним, что в соответствии с [1], *уравнением* называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) — это пара функций от одной и той же переменной x, соединённых знаком равенства:

$$f(x)=g(x).$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$D(f)\cap D(g).$$

Число a называется *корнем (или решением)* данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство: $f(a)=g(a)$.

Существуют эквивалентные определения корня уравнения, в которых требуется принадлежность числа a ОДЗ исходного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет. Отметим, что если мы нашли подбором какие-то корни уравнения и доказали, что других корней у данного уравнения быть не может, то тем самым мы уравнение решили.

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. Уравнение A является *следствием* уравнения B, если все корни уравнения B являются корнями уравнения A (но, быть может, среди корней уравнения A есть такие, которые не являются корнями B).

Преобразование уравнения называется *равносильным,* если преобразуемое уравнение равносильно исходному.

1. Если при решении уравнения вы производили лишь равносильные преобразования, то для найденных корней нет нужды делать проверку.

2. Если вы нашли ОДЗ и в пределах ОДЗ производили равносильные преобразования уравнения, то проверку также делать не нужно, но необходимо выяснить, входят ли найденные корни в ОДЗ.

3. Если не все преобразования были равносильными, но каждое уравнение было следствием предыдущего, то необходимо сделать проверку.

Отметим, что очень часто находить ОДЗ нецелесообразно, если экономнее (по времени) найти «корни» (среди которых, быть может, есть лишние) и сделать проверку.

Всё сказанное в отношении проверки справедливо с чисто математической точки зрения. То есть, если все ваши преобразования были равносильны, то приводить в конце решения проверку нет необходимости. И в этом случае (при наличии соответствующей оговорки) ваше решение будет смотреться более грамотным с точки зрения математики.

Но совсем иное дело, если речь идёт о самоконтроле. Здесь мы рекомендуем делать в некоторых случаях не одну, а несколько проверок.

*Полезные неравенства

Отметим, что при решении уравнений (и неравенств) иногда бывают полезны следующие неравенства, истинные для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$:

$$a \leqslant \frac{a^2+1}{2}; \qquad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \qquad \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Равенства достигаются при $a = b$ (в первом случае при $a = 1$).

Полезны также некоторые их следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \text{ при } a > 0; \qquad a + \frac{1}{a} \leqslant -2 \text{ при } a < 0.$$

Равенства достигаются при $a = 1$ в первом случае и при $a = -1$ во втором.

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и y называется пара функций от двух переменных (x и y), соединённых знаком равенства:

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x,y) = g(x,y), \\ h(x,y) = t(x,y). \end{cases}$$

Решением системы называется всякая пара чисел (x_0, y_0), являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему — это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

§ 10. Неравенства

Неравенства и системы неравенств

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединённая одним из знаков: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, $\neq$.

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными,* если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают.

2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств (систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида $\left[\begin{array}{l} f(x)\geqslant g(x), \\ h(x)<u(x). \end{array}\right.$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Поскольку $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x) > 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \geqslant 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{cases}$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Пример. Решите неравенство $\dfrac{x^2-7x+10}{x-3} + \dfrac{6x-9}{x+1} \leqslant 1$.

Решение. $\dfrac{x^2-7x+10}{x-3} + \dfrac{6x-9}{x+1} - 1 \leqslant 0$,

$$\frac{(x^2-7x+10)(x+1)+(6x-9)(x-3)-(x-3)\cdot(x+1)}{(x-3)(x+1)} \leqslant 0,$$

$\dfrac{x^3-x^2-22x+40}{(x-3)\cdot(x+1)} \leqslant 0$. Числитель последней дроби разложим на множители.

Подбором находим, что $x=2$ является корнем многочлена $x^3-x^2-22x+40$; разделив данный многочлен (уголком или по схеме Горнера) на $x-2$, получаем $x^3-x^2-22x+40=(x-2)\cdot(x^2+x-20)=$ $=(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)$. Значит, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x+1)\leqslant 0, \\ (x-3)\cdot(x+1)\neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 1) и выка-

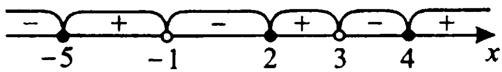


Рис. 1

лывая точки $x=-1$, $x=3$, получаем ответ
$x\in(-\infty;-5]\cup(-1;2]\cup(3;4]$.

§ 11. Функции

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y=f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, рассматривается функция $y=\sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. В данном случае $D(y)=[0;\ \pi]$, так как данной фразой функция $y=\sin x$ определена лишь на отрезке $[0;\ \pi]$. Если же рассматривается функция $y=\sin x$ без каких-либо оговорок, то это означает, что $D(y)=R$. В этом случае говорят также, что функция $y=\sin x$ определена на всей числовой прямой. С другой стороны, пусть рассматривается функция $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. В данной фразе также нет каких-либо оговорок относительно того, на каком числовом промежутке рассматривается функция. Вместе с тем мы видим, что эта функция не определена для $x<1$, так как при $x<1$ под корнем будет отрицательное число. Эта функция также не определена при $x=\pm2$, так как при $x=\pm2$ знаменатель обращается в нуль. Таким образом, для данной функции $D(y)=[1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

Напомним области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$D\left(\dfrac{1}{x}\right)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. $\qquad D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;\ +\infty)$.

$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R$. $\qquad D(\log_a x)=(0;\ +\infty)$.

$D(\sin x)=D(\cos x)=R$. $\qquad D(a^x)=R$.

*$D(\arcsin x)=D(\arccos x)=[-1;\ 1]$.

*$D(\operatorname{arctg} x)=D(\operatorname{arcctg} x)=R$.

$$D(\operatorname{tg} x)=\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right),\ k\in Z.$$

Или $D(\operatorname{tg} x):\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$.

$D(\operatorname{ctg} x)=(2\pi k;\pi+2\pi k)\cup(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k),\quad k\in Z$.

Или $D(\operatorname{ctg} x):\ x\neq\pi k,\quad k\in Z$.

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдётся такое число x_0, что $f(x_0) = y_0$.

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m;\ +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty;\ n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$.

$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$. $E\left(a^x\right) = (0;\ +\infty)$.

$E\left(\log_a x\right) = R$. $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1;\ 1]$.

$^*E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. $^*E(\arccos x) = [0;\ \pi]$.

$E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R$. $^*E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$^*E(\operatorname{arcctg} x) = (0;\ \pi)$.

Отметим, что задания на нахождение множества значений какой-то функции решаются преимущественно двумя методами: аналитическим и алгебраическим.

Приведём одно *замечание*. Предположим, что функция $f(x)$ является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» $t = t(x)$. Тогда $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$. Отметим, что неважно, какой является функция $t = t(x)$ (возрастающей, возрастающе-убывающей и т. д.). Если нам известна её область значений $E(t)$, то при нахождении области значений функции $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$ целесообразно считать, что t возрастает на $E(t)$ как какой-то новый аргумент. В соответствии с этим функцию $y = f(t)$ целесообразно считать такой, каковой она является от аргумента t на промежутке $E(t)$. Например, пусть нам дана функция $y = 2\cos x + 1$. Вводим новую переменную $t(x) = \cos x$. Понятно, что $E(t) = [-1;\ 1]$. Тогда функцию $y(t) = 2t + 1$ целесообразно считать линейной на промежутке $[-1;\ 1]$. Это никак не повлияет на нахождение $E(y)$, но, напротив, облегчит нам эту процедуру. Находим $E(y)$. Функция $y(t) = 2t + 1$ на промежутке $[-1;\ 1]$ является линейной и возрастающей, поэтому $E(y) = [2(-1) + 1;\ 2 \cdot 1 + 1] = [-1;\ 3]$.

При решении задач аналитическим методом будем пользоваться следующими фактами.

1. Пусть $f(x)$ — какая-то функция и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, где a — какое-то число или $a = +\infty$, или $a = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$, причём при значениях x, доста-

точно близких к a, величина $\frac{1}{f(x)}$ будет достаточно близкой к нулю, но вместе с тем больше нуля. В этом случае мы будем говорить, что величина $\frac{1}{f(x)}$ стремится к нулю справа при x, стремящемся к a: $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +0$. В этом смысле будем употреблять запись $\frac{1}{+\infty} = +0$.

2. В аналогичном смысле будем употреблять также запись вида $\frac{1}{-\infty} = -0$.

3. Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, причём при всех x, достаточно близких к a, функция $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Этот факт мы будем записывать иногда в виде $\frac{1}{+0} = +\infty$.

4. В подобном же смысле мы будем употреблять запись $\frac{1}{-0} = -\infty$.

5. Ниже мы приводим записи, которые будем в дальнейшем использовать, но понимать эти записи следует не в буквальном смысле. Фактический смысл этих записей вам предлагается привести самим.

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ +0 \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} +0 \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\log_a(+0) = \begin{cases} -\infty \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ -\infty \text{ при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 2–7 изображены графики основных элементарных функций.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 8).

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 9).

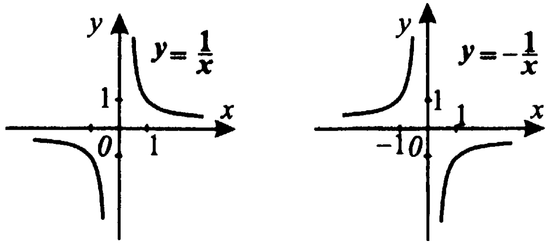


Рис. 2

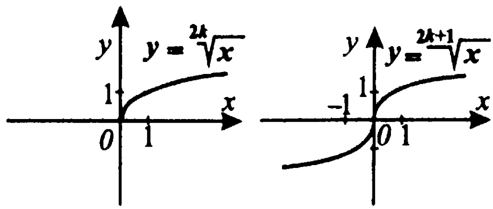


Рис. 3

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 10).

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 11).

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 12).

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 13).

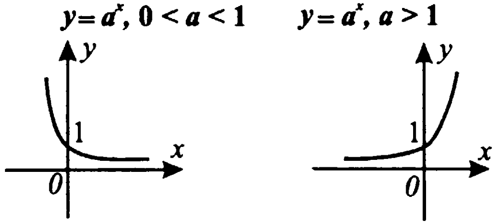


Рис. 4

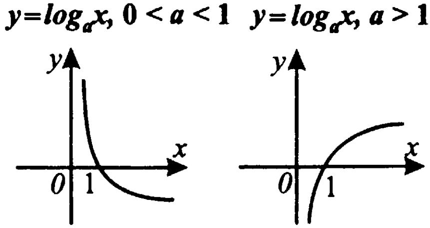


Рис. 5

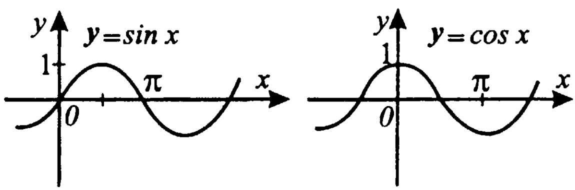


Рис. 6

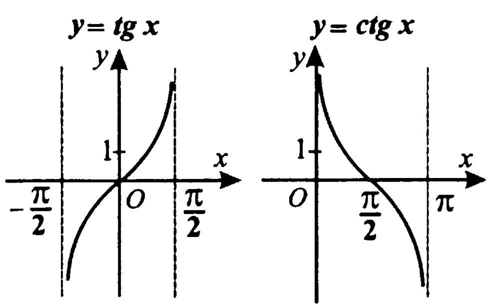


Рис. 7

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 14).

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 15).

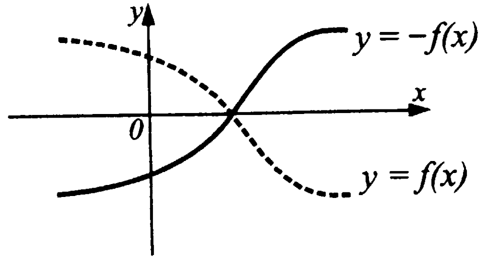


Рис. 8

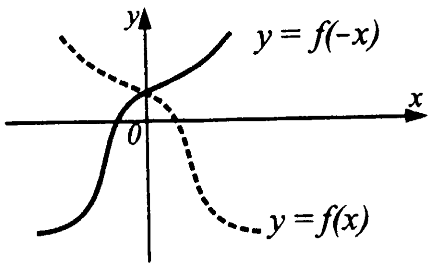


Рис. 9

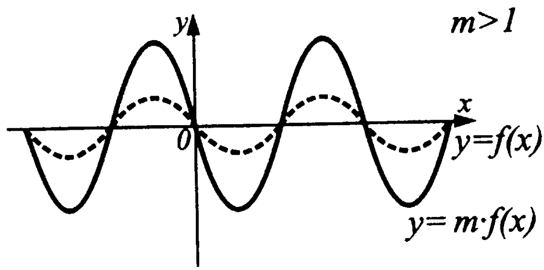


Рис. 10

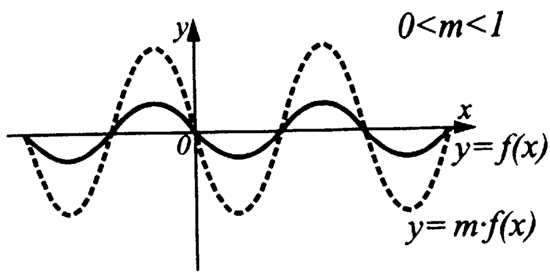


Рис. 11

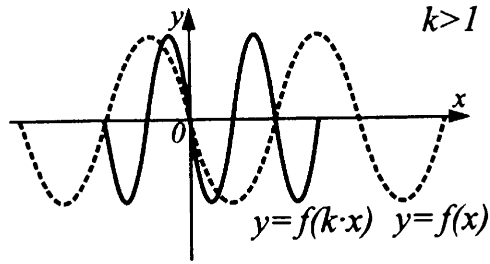


Рис. 12

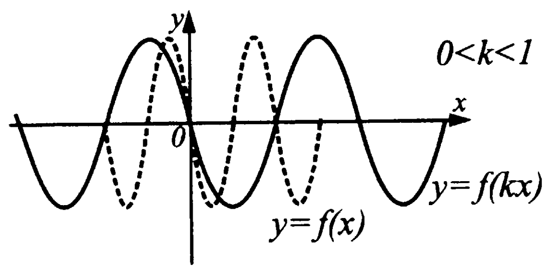


Рис. 13

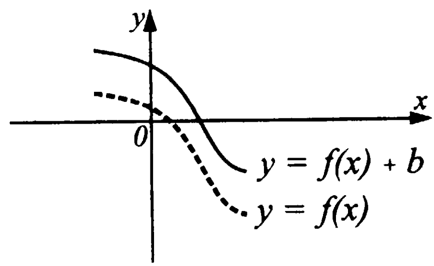


Рис. 14

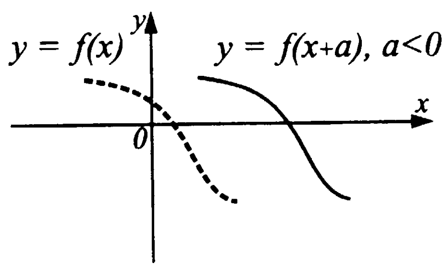


Рис. 15

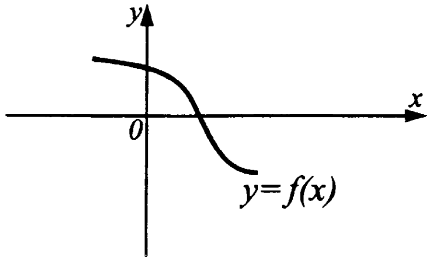


Рис. 16

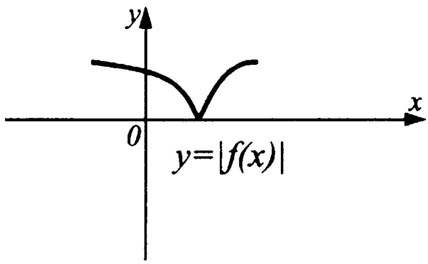


Рис. 17

График функции $y = |f(x)|$ (см. рис. 17) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 16) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox.

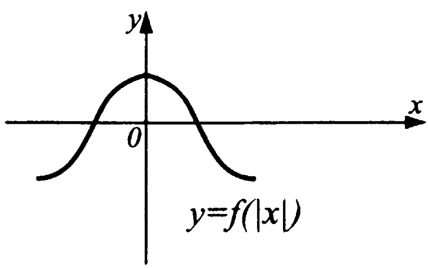


Рис. 18

График функции $y = f(|x|)$ (см. рис. 18) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 16) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy.

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности (интервале, содержащем точку x). Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, чтобы не выйти из указанной окрестности.

Найдём соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$(c)' = 0$ (c — const); $\quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (α — const);

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $\quad (\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$; $\quad (e^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$; $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$;

*$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\quad$ *$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

*$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$; $\quad$ *$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Основные правила дифференцирования

$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, c — const; $\quad (u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

$y = f(g(x))$, $y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x)$, где $u = g(x)$.

Отметим, что справедливо следующее свойство:

если функция $f(x)$ чётна (нечётна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-либо тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t.

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает (убывает)* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Замечание. Если функция возрастает (убывает) на двух промежутках, из этого ещё не следует, что она возрастает (убывает) на объединении этих промежутков. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на области определения.

Если на каком-то промежутке функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и дифференцируема на этом промежутке, то $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$, причём равенство нулю невозможно на промежутке ненулевой длины.

Верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в частном случае. Именно, если на каком-то промежутке $f'(x) \geqslant 0$ $\big(f'(x) \leqslant 0\big)$, причём равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек этого промежутка, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает (убывает). Отсюда следует, что если производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «−» (с «−» на «+»), то функция $y = f(x)$ в этой точке меняет возрастание на убывание (убывание на возрастание). А это значит, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум).

Предлагаем доказать самостоятельно, что для сложной функции $f\big(g(x)\big)$ двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива данная ниже табличка, в которой «+» означает возрастание функции, а «−» — убывание.

$f(x)$	+	+	−	−
$g(x)$	+	−	+	−
$f\big(g(x)\big)$	+	−	−	+

Наибольшее, наименьшее значения функции

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется *наибольшим (наименьшим)* значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \big(f(x_0) \leqslant f(x)\big).$$

Справедлива следующая теорема.

Дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a; b)$.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Применение свойств функций при решении уравнений

Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$.

1. Пусть на ОДЗ уравнения функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Тогда уравнение не может иметь более одного корня.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и выполняются неравенства $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Тогда уравнение имеет по крайней мере один корень на интервале $(a; b)$.

3. Пусть число A является наибольшим значением функции $f(x)$ и наименьшим значением функции $g(x)$. Тогда исходное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на некотором числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке A.

Отметим, что две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную. И обратно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то для любого c (c — const) функция $F(x) + c$ тоже первообразная для функции $f(x)$.

Приведём таблицу первообразных для основных элементарных функций. Буквой c везде обозначается произвольная постоянная.

$F(x^\alpha) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \; (\alpha \neq -1)$. $\qquad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln|x| + c$.

$F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x + c, \;\; x > 0$. $\qquad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c, \;\; x < 0$.

$F(\sin x) = -\cos x + c$. $\qquad F(\cos x) = \sin x + c$.

$F\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x + c$. $\qquad F\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x + c$.

$F(a^x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$. $\qquad F(e^x) = e^x + c$.

$^*F\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + c$. $\qquad {}^*F\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c$.

Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных. Неопределённый интеграл функции $f(x)$ обозначается через

$\int f(x)dx$ и вычисляется по формуле

$\int f(x)dx = F(x) + c$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Кроме того, при нахождении интегралов можно пользоваться формулами:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, где $k \in R$.

Определённый интеграл

Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно найти по формуле $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Для приведённой формулы используется сокращённая запись:

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Справедливы формулы: $\int\limits_a^b kf(x)dx = k \int\limits_a^b f(x)dx$, где $k \in R$;

$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 19) можно вычислить по формуле $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$.

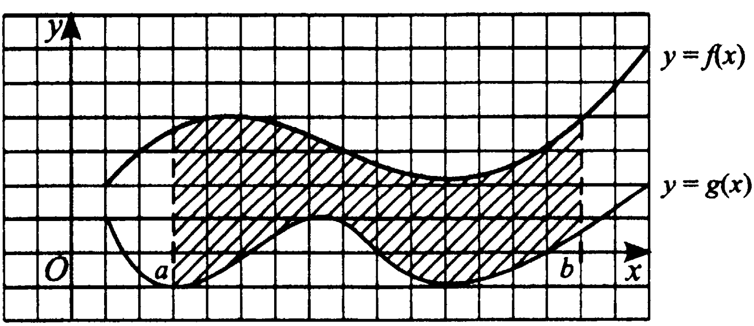


Рис. 19

§ 12. Планиметрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

4. Сумма внешних углов n-угольника равна $360°$.

5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

6. Угол между биссектрисами смежных углов равен $90°$.

7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, — то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.

4. Против большей стороны треугольника лежит бóльший угол.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр короче наклонных;

2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен $30°$.

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведённая к стороне c, то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.
2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.
3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.
4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.
7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.
2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n};\quad a_n = 2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\cdot r_n;\quad r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой центром окружности.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R $(r < R)$ с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними касательными. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна $180°$, то около него можно описать окружность.

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

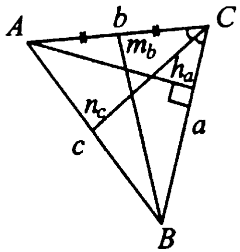
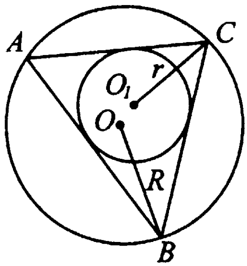
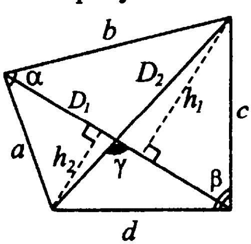
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

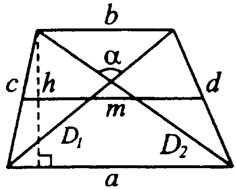
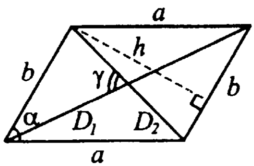
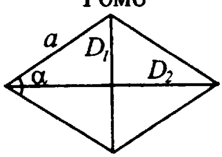
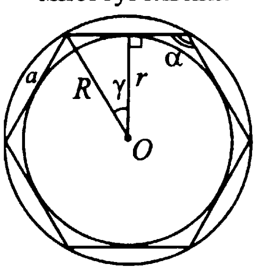
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

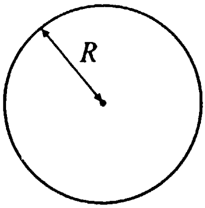
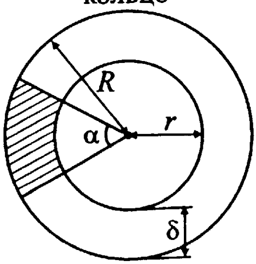
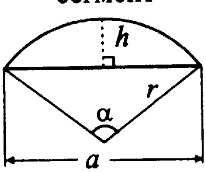
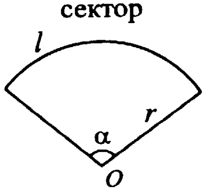
Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник   	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \dfrac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b = \dfrac{2S}{b}$ $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b = \dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_a b_c}$ $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ $S = r^2 \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \dfrac{4}{3}\sqrt{\mu}\,\times$ $\times\sqrt{(\mu-m_a)(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник  	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S = \dfrac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S = \dfrac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$ $S = \dfrac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$

Чертежи	**Обозначения**	**Формулы**
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a+b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\alpha$
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$
Ромб 	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2 \sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2$
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2\sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг  	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо  	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца: $S = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент  	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P = l + a$ $S = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$ $S = \frac{r(l-a)+ah}{2}$
Круговой сектор  	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P = l + 2r$ $S = \frac{lr}{2}$ $S = \frac{\pi r^2\alpha}{360}$

§ 13. Стереометрия

Аксиомы стереометрии

Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.

2. Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b, то прямые a и b параллельны.

3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.

4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M.

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

Параллельное проектирование

1. Прямая, не параллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, не параллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB, а N — середина CD, то $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

22. Зак. № 41

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. **Свойства скалярного произведения векторов:**

а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

б) $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

в) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$;

д) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}+2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^{\,2}$;

е) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

12. **Угол между ненулевыми векторами.** Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

13. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет вид

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

14. **Параметрические уравнения прямой,** проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид

$$\begin{cases} x-x_0 = at, \\ y-y_0 = bt, \\ z-z_0 = ct. \end{cases}$$

15. **Уравнения прямой, проходящей через две точки** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

16. **Прямая как пересечение двух плоскостей** задаётся системой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

где $A_1^2+B_1^2+C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2+B_2^2+C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. **Угол между плоскостями.** Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и
$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

18. **Уравнение плоскости «в отрезках».** Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ $(a, b, c \neq 0)$, то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. **Расстояние от точки до плоскости.** Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует бóльшая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Пирамида

Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D, высотой DM и стороной основания a, а A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{AA_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD.

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P, высотой PM и стороной основания a, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP.

5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, а R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad R = 3r; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. **Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда**

а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A.

Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах DA, DB и DC соответственно треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём V тетраэдра равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние c между ними и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

11. Объём V тетраэдра равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a, то есть $V = \frac{2}{3}\frac{PQ\sin\varphi}{a}$.

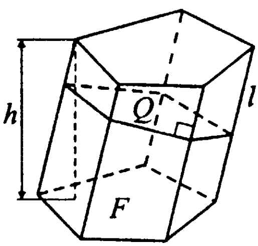
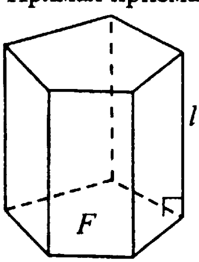
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

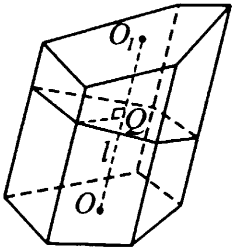
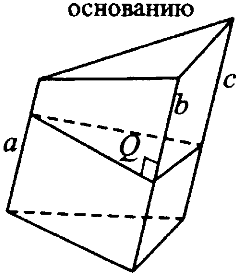
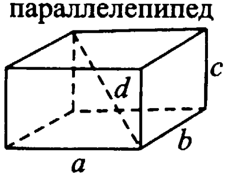
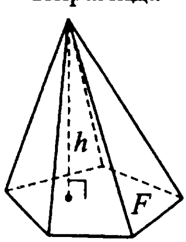
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

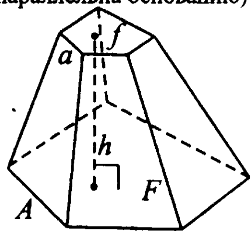
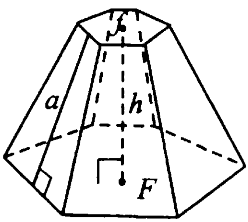
Основные формулы

Далее V — объём тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности.

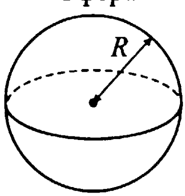
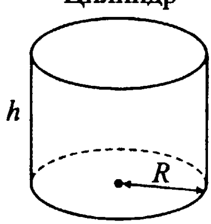
Многогранники

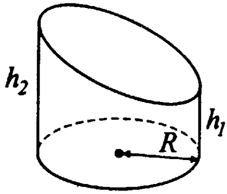
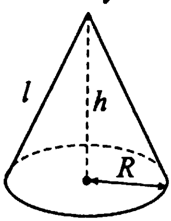
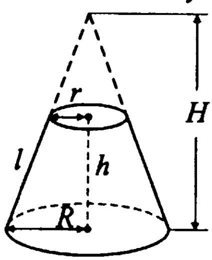
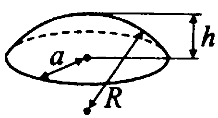
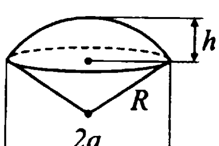
Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма 	F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.	$V = Fh = Ql$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$
Прямая призма 	F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.	$V = Fl$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма, усечённая непараллельно основанию 	l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.	$V = Ql$
Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию 	a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.	$V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$
Прямоугольный параллелепипед 	a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.	$V = abc$ $S = 2(ab+bc+ac)$
Пирамида 	F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).	$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида: $S_б = \frac{1}{2}Pa$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Усечённая пирамида (плоскость сечения параллельна основанию) 	F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF\left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$
Правильная усечённая пирамида 	F, f — площади оснований; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_б = \frac{P + p}{2} \cdot a$

Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
Сфера 	R — радиус.	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
Цилиндр 	R — радиус основания; h — высота.	$V = \pi R^2 h$ $S_б = 2\pi Rh$ $S = 2\pi R(h + R)$

Цилиндр, усечённый непараллельно основанию 	R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.	$V = \frac{1}{2}\pi R^2(h_1 + h_2)$ $S_б = \pi R(h_1 + h_2)$ $S = \pi R\left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right)$
Конус 	R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_б = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ $S_б = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$
Усечённый конус 	R и r — радиусы оснований; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённого конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_б = \pi l(R + r)$ $S = \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))$
Шаровой сегмент 	h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сегмента.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_б = 2\pi Rh$ $S_б = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2)$ $S = \pi(a^2 + 2Rh)$
Шаровой сектор 	h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$

Ответы к тестам

Ответы к заданиям части 1 (начало)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	376	71	35	0,986	–0,5	0,8	0,5	343	96	5	52	9
2	90	20	30	0,96	0,25	–0,6	–0,4	1 728	20	5,55	50	7
3	31	24	24	0,0112	8	1,2	1,4	17,1	2,25	0,69	17	8
4	10	22	7,5	0,019	0,275	0,48	–1,4	2,56	0,75	0,74	27	81
5	20	8	15	0,25	102	9,8	10	9	15	3,5	375	–25
6	15	5	16	0,2	–24	48	5	38	49	2400	3	19
7	1 710	30	45	0,04	–0,75	9,6	–2	4,5	24	0,2	7	9
8	2360	10	18	0,06	3	9	2	10,8	–28	0,4	7	–6
9	6	4 180	3,5	0,1	6	4	2	168	33	550	1400	6
10	26	4 170	5	0,15	8	2	2	20	–38	500	862,5	0
11	1320	3	3,5	0,9964	–3,5	4	18	54	27	45	45	–500
12	13 200	6	4,5	0,84	–0,5	0,75	18	3	38	40	210	290
13	19 836	6	30	0,43	13	45	7	460	0,25	8	35	25
14	28 000	4	64	0,28	4	180	3	144	–7	10,4	75	16
15	7	5	25	0,48	29	42	–1,5	60	15	30	4	–90
16	44	6	28	0,4	–1	82	–0,5	54	–17	2	1	150
17	8400	14	47	0,25	5	24	2	102	6	317,5	60	140
18	109 200	6	91	0,5	3	45	–5	3 750	8	338	20	–160
19	10	10	108	0,2	–68	30,25	99	4 176	7	4	12	0,75
20	4	25	37	0,4	13	15	52	860	–6	40	16	0,5

Ответы к заданиям части 1 (окончание)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
21	13	6	19,5	0,483	4	6	5	64	7	62,5	60	101
22	14	5	16,5	0,44	21	5	6	196	–24	100	24	28
23	26,25	1	36	0,2	–2	18	6	13	0,2	16	275	18,4
24	58	16	6	0,08	0,25	10	3	94	3,5	9	1200	–448
25	195,2	3	16	0,0625	1	71	5	6	6	50	6	5
26	513,6	9	20	0,125	3	331,5	5	2,4	24	20	10	8
27	1008	5	14	0,17	25	114	–4	400	64	30	78	–17
28	272	4	29	0,03	10	124	–4	49	4	30	32,2	9
29	212	10	22	0,125	9	63	7	23	1	37,5	654	–3
30	540	–9	38	0,375	–2	63	6	431	3	70	72	6
31	434	90	1	0,043	3	0,5	15	500	–176	90	795 000	–100
32	146	54	0,25	0,966	–0,4	24	–6	4	19	30	2 450 000	50
33	30	5	5	0,65	–69	12	576	0,96	3	600	10	4
34	31	22	29	0,3	72	61	27	0,8	–1	3844	50	–5
35	11	2 000	13	0,32	–1,5	204	3	74	22	5 000	26	–13
36	9	1 500	17	0,2	3	38	6	140	21	4 000	36	8
37	480	2	2,5	0,496	16	3	–7	7	7	84	5,1	–31
38	3600	4	15	0,756	–6	4,5	23	3	6	384	7,2	32
39	218	16	31,5	0,336	–2	23	6	12	1	27	50	–7
40	24	20	22,5	0,288	5,5	27	8	16	1	8	96	17

Ответы к заданиям 13–19 (начало)

№	13	14	15	16	17	18	19
1	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6}$	16	$(-\infty;1)\cup$ $\cup[\log_4 5;1{,}5)$	$\frac{\sqrt{153}}{2}$	2	$\left(\frac{4}{9};1\right)$	а) да, б) да, в) 10
2	а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $\frac{7\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4}$	$77\frac{7}{9}$	$(-\infty;0]\cup$ $\cup(\log_{11}3;1)$	$2\sqrt{82}$	5	$[-4;0]$	а) да, б) да, в) 35
3	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k,$ $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k,n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{6}$	8	$(-\infty;-1)\cup$ $\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup$ $\cup(2;+\infty)$	98	306	$(2-2\sqrt{10};-4)\cup$ $\cup\{0\}$	а) да, б) нет, в) 26
4	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,$ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k,n\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{3},\ -\frac{3\pi}{2}$	$\frac{16}{3}$	$(-\infty;1)\cup$ $\cup\{0\}\cup$ $\cup(2;+\infty)$	300	12	$\{0\}\cup$ $\cup(2;-3+\sqrt{34})$	а) да, б) нет, в) 26
5	а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$ б) $\frac{5\pi}{4}$	б) $\arccos\frac{119}{182}$	$(-\infty;-\sqrt{3})\cup$ $\cup(-\sqrt{3};-\sqrt{2}]\cup$ $\cup\{0\}\cup[\sqrt{2};\sqrt{3})\cup$; $\cup(\sqrt{3};+\infty)$	$65+27\sqrt{5}$	7	$[-4;4\sqrt{2}-8)$	а) да; б) нет; в) 22,5

Ответы к заданиям 13–19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
6	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; $\frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$	б) $\arccos\frac{21}{80}$	$(-\infty; -\sqrt{2}$; $(-\sqrt{2}; -1]; 0$; $[1; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; +\infty)$	$\frac{464}{7}$	12	$(2\sqrt{2}-2; \sqrt{2}]$	а) да; б) нет; в) 16,5
7	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$	б) $\arccos\frac{161}{323}$	$(-\infty; -\sqrt{2}]; 0$; $[\sqrt{2}; +\infty)$	$\frac{520}{7}$	10	$[-3; 3\sqrt{2}-6)$	а) да; б) нет; в) 14,5
8	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	б) $\arccos\frac{41}{899}$	$(-\infty; -\sqrt{3}]; 0$; $[\sqrt{3}; +\infty)$	$6+2\sqrt{3}$	5	$(2\sqrt{3}-\sqrt{6}; \sqrt{3}]$	а) да; б) нет; в) 26,5
9	а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; $\frac{\operatorname{arctg} 3}{2}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ б) $\frac{\pi}{8}, \frac{\operatorname{arctg} 3}{2}$	$\frac{21\sqrt{2}}{2}$	$(-4; -3)\cup[3; 4)$	$2\sqrt{5}$	5	$(9; 10]$	а) 144; б) 720; в) 1224
10	а) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$, б) $-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$	$8\sqrt{2}$	$(-2; 2]$	$25\sqrt{3}$	6	$(7; 8]$	а) 15 625,б) 1 800,в) 15 000

Ответы к заданиям 13–19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
11	а) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$; $\frac{\operatorname{arctg}3}{3}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$; б) $\frac{\pi}{12}, \frac{\operatorname{arctg}3}{3}$	$5\sqrt{7}$	$(-3;-2]\cup$ $\cup(2;3)$	$2\sqrt{6}$	4	$(1;2]\cup[14;15)$	а) 840; б) 6 300; в) 13 965
12	а) $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$	$5\sqrt{7}$	$(-4;-3)\cup$ $\cup[3;4)$	$78{,}75\sqrt{2}$	5	$(1;2]\cup[6;7)$	а) 279 936; б) 15 120; в) 278 040
13	а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{5\pi}{3}$	$\frac{4\sqrt{11}}{11}$	$\left(-\frac{1}{2};0\right)$	2	(55%; 62,5%)	$\frac{1}{4}$	а) нет; б) нет; в) 6, 15, 30, 33, 66, 110, 165; 330
14	а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$;	$\frac{2\sqrt{11}}{11}$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	17	$\left(40\%; 43\frac{1}{3}\%\right)$	$\frac{5}{2}$	а) нет; б) нет; в) 6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210
15	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	$[\log_3 7;+\infty)$	$36\sqrt{3}$	2,4	$-2; (-1;2)$	а) да, б) нет, в) да

Ответы к заданиям 13–19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
16	а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$	$\frac{5\sqrt{2}}{6}$	$[3; +\infty)$	$12\sqrt{11}$	2	$(-2; 3)$	а) нет; б) нет; в) 6; 10; 15; 30; 114; 190; 285; 570
17	а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}$; $k, m\in Z$. б) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$(3;\ 3{,}5)\cup$ $(3{,}5;\ 4)$	$\frac{10}{3}$	324	$(-\infty; +\infty)$	
18	а) $\frac{k\pi}{3}; -\frac{\pi}{12}+\frac{2p\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}+\frac{2q\pi}{3}, k, p, q\in Z$; б) $\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}$	$4\sqrt{6}$	$(0;\ 0{,}5)\cup$ $\cup(0{,}5;\ 1)$	$\frac{2\pi}{3}$	2	$(-\infty; +\infty)$	
19	а) $\pi m;\ \frac{\pi}{12}+\pi t$; $\frac{5\pi}{12}+\pi s, (m, t, s\in Z)$; б) $-3\pi; -\frac{35}{12}\pi; -\frac{31}{12}\pi$	$\frac{33\sqrt{6}}{2}$	$(-\infty, 2)$	1	20	$(-2+\sqrt{2}, 0)\cup$; $\cup(0, 2-\sqrt{2})$	а) да; б) да; в) 7

Ответы к заданиям 13–19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
20	а) $\frac{\pi}{2}+\pi m;\ \frac{\pi}{4}+\pi n, (m, n\in Z)$; б) $-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{2}$	$59\frac{11}{14}$	$(-\infty, -1)\cup$ $\cup(1, +\infty)$	$\frac{17}{8}+\sqrt{2}$	0,625	$(-2+\sqrt{2}; 0)\cup$ $\cup(0; 2\sqrt{2})\cup$ $\cup(2\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$	а) да; б) да; в) 7
21	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}$	$\frac{168}{\sqrt{2\,389}}$	$\left(0; \frac{\sqrt{3}}{81}\right]\cup\left(\frac{1}{27}; 3\right]$	12	8,4	$(-\infty; 0]\cup$ $\cup\left[\frac{2}{5}; \frac{23}{4}\right]$	а) да, б) нет, в) 7,1
22	а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$	$\frac{330\sqrt{2}}{\sqrt{1921}}$	$\left(0; \frac{1}{5}\right]\cup[5\sqrt{5}; 25)$	140	7,7	$\left(0; \frac{1}{6}\right]$	а) да б) нет в) 7,1
23	а) $2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{2\pi}{3}, 0$	$\frac{120}{\sqrt{689}}$	$\left(0; \frac{1}{8}\right)\cup$ $\cup\left[\frac{\sqrt[3]{2}}{4}; +\infty\right)$	40	11,2	$\left(-\frac{24}{83}; 0\right]\cup$ $\cup\left\{\frac{3}{5}\right\}$	а) да, б) нет, в) 4
24	а) $\pi+2\pi n, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; б) $\frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, 5\pi$	$\frac{336}{\sqrt{674}}$	$\left[\frac{\sqrt{5}}{125}; \frac{1}{25}\right)\cup\{1\}$	96	8,537 5	$\left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup$ $\cup[-0,1; 0]$	а) да, б) нет, в) 4

Ответы к заданиям 13–19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
25	а) $2\pi n, n \in Z$; б) $-4\pi; -2\pi; 0$	$\frac{60\sqrt{97}}{97}$	$\{3\} \cup (\log_2 9; +\infty)$	15	15% и 25%	$\left[-\frac{2}{5}; 0\right]$	а) нет; б) нет; в) да; г) да
26	а) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $-\frac{9}{2}\pi$; -4π; $-\frac{7}{2}\pi$; -3π.	6	$\{0\} \cup \{2\} \cup$ $\cup (\log_3 10; +\infty)$	10	29,3% и 41,2%	$\left(-1; \frac{3}{5}\right)$	а) нет; б) нет; в) да; г) да
27	а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$; $-2\pi + \arcsin\frac{1}{3}$; $-\pi - \arcsin\frac{1}{3}$	1 : 2	$\left(0; \frac{1}{2}\right)\{1; 256\} \cup$ $\cup (512; +\infty)$	300	а) $K_0\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot$ $\cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) >$ $> K_1\left(1 + \frac{d}{100}\right)$; б) Деньги лучше переложить	$(-\infty; 4) \cup$ $\cup (6; +\infty)$	а) 1452; б) 257764; в) 36899863.
28	а) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$; $\pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{11}{6}\pi; \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi$.	3 : 1	$\left(0; \frac{1}{16}\right] \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right] \cup$ $\cup [1; 2) \cup [4; +\infty)$	2	$K_1 < 67{,}5$	$[-2; 4]$	а) 8533; б) 742113; в) 96433469.

Ответы к заданиям 13–19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
29	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k, k \in Z$. б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi, -\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}$	$\arccos\frac{1}{4}$	$(0; \log_2 3]$	а) $\frac{10}{3}$; б) 29,4	32 000	$-4; 2$	а) 48; б) 1; в) 28
30	а) $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n, n \in Z$; б) $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi; -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arccos\frac{5}{7}$	$(0; \log_3 4]$	а) 3; б) $3-\sqrt{3}$	10 000	$3; \frac{1}{3}$	а) 24; б) 1; в) 6
31	а) $\pi n; n \in Z$; $\operatorname{arctg} 2+\pi k, k \in Z$. б) $0, \pi, \operatorname{arctg} 2$	$\arccos\frac{1}{4}$	$\left[\frac{1}{27}; 9\right]$	а) 4,8; б) $75\frac{5}{24}$	64 000	$\sqrt{2}(6 \pm \sqrt{5})$; $\sqrt{2}(2\sqrt{29} \pm \sqrt{5})$	а) 42; б) 1; в) 20
32	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$	$\arccos\frac{5}{7}$	$\left[\frac{1}{3125}; 625\right]$	а) $\frac{10}{3}$; б) $\frac{5(2-\sqrt{2})}{3}$	20 000	$3\sqrt{5}-\sqrt{7}$; $\sqrt{73}+\sqrt{7}$	а) 18 б) 1; в) 6
33	а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n \in Z$, $\operatorname{arctg} 2+\pi(1+2k), k \in Z$; б) $\pi+\operatorname{arctg} 2; \frac{9\pi}{4}$.	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$(1; 2) \cup \{3\} \cup$ $\cup (5; +\infty)$	2,25	6,25	$-4; 5$	а) да; б) нет; в) 1

Ответы к заданиям 13–19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
34	а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi(1+2k)$, $k\in Z$; б) $-3\pi+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}; -\frac{7\pi}{4}$	$15\sqrt{2}$	$(1;2)\cup\{3\}\cup$ $\cup(4;5)$	$2\frac{14}{15}$	12,5	$-1; 3$	а) да; б) нет; в) 0
35	а) 1; $\log_2 3$; б) $\log_2 3$	10,5	$[0;\log_3 2]$	$\sqrt{37}$	23 яблока в автобус с 40 детьми	$\left(-4;-\frac{4}{3}\right)\cup$ $\cup\{-2\sqrt{5};\sqrt{2}\}$	а) нет б) 2,25; в) $n=2k+1$; $k+1$, $k\in N$
36	а) 0; $\log_3 4$; б) 0	$\frac{2\sqrt{30}}{3}$	$(-\infty;\log_2 3]\cup$ $\cup[2;+\infty)$	1,5	19 вишневых пирожков в автобус с 40 детьми	$\left\{-\frac{3\sqrt{10}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}\cup$ $\cup\left(-\frac{9}{2};-\frac{9}{4}\right)$	а) нет б) 1; в) $n=2k+1$; $k+1$, $k\in N$
37	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ б) $\pm\frac{\pi}{2}$	$\frac{7}{6}\pi$	$(1;3-\sqrt{2}]\cup$ $\cup(4;3+\sqrt{2}]\cup$ $\cup[16;+\infty)$	$9+4\sqrt{3}$	80	2	а) 6; б) 11; в) 4
38	а) $\pi k, k\in Z$ б) $-3\pi; -2\pi$	15π	$\left(\frac{-7-\sqrt{5}}{2};-4{,}5\right)\cup$ $\cup\left(-3;\frac{-7+\sqrt{5}}{2}\right)$	$2(\sqrt{5}+1)$	75	-6	а) 3; б) 4; в) 11

Ответы к заданиям 13–19 (окончание)

№	13	14	15	16	17	18	19
39	а) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$, б) $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$	$2\arccos\frac{24}{\sqrt{769}}$; $\frac{288}{5\sqrt{769}}$	$(-\infty; -1)\cup$ $\cup(\log_{\frac{4}{3}} 3; +\infty)$	$2\sin 10^\circ$		-1	$\{(0,0,0), (0,2,0), (0,0,4), (0,2,4), (3,2,3), (-3,2,3), (3,0,3), (-3,2,1), (3,2,1), (3,0,1), (-3,0,3), (-3,0,1)\}$
40	а) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in Z$; б) 1; $\frac{\pi}{3}$	$\frac{288}{5\sqrt{769}}$	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup$ $\cup(\log_{\frac{28}{9}} 3; 1)$	$\frac{2}{\sin 10^\circ}$		$a=-2$, $\rho=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $a=3$, $\rho=\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\{(1,0,2), (1,0,4), (1,4,2), (1,4,4), (-2,1,3), (4,1,3), (-2,3,3), (4,3,3)\}$

Литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2016 году Единого государственного экзамена по математике. Профильный уровень. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
2. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов Единого государственного экзамена 2016 года по математике. Профильный уровень. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
3. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
4. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ № 1897 от 17.12.2010.
6. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. 2004 г. Приказ МО РФ № 1089 от 05.03.04.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ № 413 от 17.05.2012.
8. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 2: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 256 с.
9. Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 256 с.
10. Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10–11 классы: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 400 с.

Учебное издание

Авилов Николай Иванович, **Войта** Елена Александровна, **Дерезин** Святослав Викторович, **Иванов** Сергей Олегович, **Коннова** Елена Генриевна, **Корянов** Анатолий Георгиевич, **Кривенко** Виктор Михайлович, **Кулабухов** Сергей Юрьевич, **Ольховая** Людмила Сергеевна, **Ольховой** Алексей Федорович, **Резникова** Нина Михайловна, **Фридман** Елена Михайловна, **Ханин** Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2016. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ.

40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *О. Сапожников*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 10.09.2015.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,46.
Доп. тираж 30 000 экз. Заказ № **41.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009 зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.