Задача 14 ЕГЭ -2015 (профильный)

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$

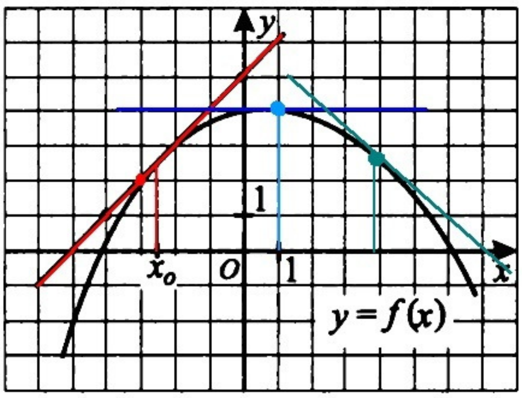
Решение.

Для решения этой задачки надо знать две темы:

1. Уметь находить производные функции
2. Уметь с помощью производных находить максимумы и минимумы.

Насчёт производных - ну, надо их знать, если не знаешь - не фиг и браться за задачку 14, производные в ней главное.

А про вторую тему маленько поговорим. С помощью производной функцию можно ИССЛЕДОВАТЬ НА ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ.



Функция, как мы знаем, может или возрастать, или убывать. Если график идёт снизу вверх (от левого нижнего к правому верхнему углу) – то функция возрастает. Если сверху вниз – функция убывает.
Так вот, смотрите по рисунку: для возрастающей функции касательная **(красный цвет)** составляет с осью абсцисс острый угол, то есть тангенс (а, значит, и производная) **положительны.**
Для убывающей функции касательная **(зеленый цвет)** составляет с осью абсцисс **тупой угол**, значит тангенс и производная **отрицательна.**
А если график перегибается от возрастания на убывание (или наоборот от убывания на возрастание), то касательная – **синий цве**т – параллельная оси абсцисс. Для такой касательной противолежащий катет равен 0, поэтому тангенс и производная тоже **равны нулю.**

Таким образом, по производной можно охарактеризовать функцию:

1. производная > 0 - функция возрастает;
2. производная < 0 - функция убывает;

3. производная = 0 - функция имеет точку перегиба. Кстати точки перегиба называются максимум (верхняя), минимум (нижняя) или экстремумами (и та и другая).

Задача 14 решается эта задача по следующему плану.
Шаг первый - находим производную заданной функции.
Шаг второй - приравниваем производную к нулю. Получилось уравнение, которое решаем и находим икс. В этой самой точке производная будет параллельна оси абсцисс, то есть здесь будет перегиб графика функции.
Шаг третий - определяем, какой именно перегиб - МАКСИМУМ или МИНИМУМ. Для этого узнаем знак производной слева и справа от найденной точки. Если слева минус, справа плюс - то функция переходит от убывания на возрастание. Значит, перегиб - МИНИМУМ. Ну, и наоборот. Приступаем.

$$y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$$

Здесь мы видим следующее: функция y представляет собой сумму трёх функций. Производная суммы равна сумме производных. Производные второго и третьего слагаемого каждый легко найдёт. Ну, а первая функция, как видите, трёхэтажная – требуется найти производную сложной функции.
Назовём функцию от x буквой p p (x) =x + 4
Назовем функцию от p буквой u u (p) = p^2
Назовем функцию от u буквой v v (u) = ln u
Правило нахождения производной для сложной функции таково

$$f'(v) = v'(u) \cdot u'(p) \cdot p'(x)$$

Для первого слагаемого получится

$$f'(v) = \frac{1}{(x+4)^2} \cdot 2(x+4) \cdot 1 = \frac{2(x+4)}{(x+4)(x+4)} = \frac{2}{x+4}$$

От второго слагаемого производная = 2, от третьего = 0, поэтому в целом

$$y' = \frac{2}{x+4} + 2$$

Это был шаг первый.

Теперь шаг второй – приравниваем производную к нулю и решаем полученное уравнение относительно x

$$0 = \frac{2}{x+4} + 2$$

$$0 = 2 + 2(x+4)$$

$$0 = 2 + 2x + 8$$

$$-2x = 2 + 8$$

$$-2x = 10$$

$$x = \frac{10}{-2} = -5$$

Таким образом, в точке x=-5 функция имеет перегиб, то есть максимум или минимум. Чтобы выяснить, какой именно – делаем **шаг третий** – определяем знак производной до этой точки (например, -6) и после этой точки (например, -4)

$$y'(-6) = \frac{2}{-6+4} + 2 = \frac{2}{-2} + 2 = -1 + 2 = 1 > 0$$

А вот точку -4 мы брать не вправе, потому что в знаменателе тогда получится нуль, а деление на нуль невозможно, то есть точка -4 не входит в область определения функции. Что же, возьмём точку -4,5

$$y'(-4,5) = \frac{2}{-4,5+4} + 2 = \frac{2}{-0,5} + 2 = -4 + 2 = -2 < 0$$

Получается, что до -5 производная положительная, функция возрастает, а после этой точки убывает. Понятно, что в этой точке перегиб – максимум.

Ответ -5